

Oppgave 1

a) Finn den deriverte av disse funksjonene:

i) $f(x) = x^2 e^{2x}$

ii) $g(x) = \ln(\sin x) + x^2$.

b) Bestem disse grenseverdiene dersom de eksisterer:

i) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \cos(x - 5)}{25 - x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

c) Beregn disse ubestemte integralene:

i) $\int \left(x + \frac{1}{2x-1} \right) dx$

ii) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$.

d) Beregn disse bestemte integralene:

i) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} \, dx$

ii) $\int_0^1 x e^{2x} \, dx$.

e) Løs likningene nedenfor. Svaret i ii) skal skrives på kartesisk form eller polarform.

i) $e^{x^2-4x} = 1$

ii) $(1-i)z = 1 + \sqrt{3}i, \quad z \in \mathbb{C}$.

Oppgave 2

a) Vi tenker oss at banen til en stein som blir kasta, er gitt ved denne funksjonen:

$$g(x) = 2 + x + 0.1e^{0.1x}x(10 - x) \quad .$$

Her er x avstanden langs bakken fra stedet steinen ble kasta, og g er høgda steinen har over bakken. Enheten for både x og g er meter.

Hvor høyt steinen er på det høyeste er bestemt av denne likninga:

$$1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) = 0 \quad .$$

Forklar hvordan vi kan komme fram til dette.

- b) Ei kanonkule blir skutt rett opp i lufta. I det den blir skutt ut, ved $t = 0$, har den farten $v_0 = 15 \text{ m/s}$ oppover. Farten oppover som funksjon av tida vil følge denne differensiallikninga:

$$v'(t) = -g - kv(t)$$

der tyngdeakselerasjonen g kan tilnærmes med 10 m/s^2 og $k = 0.1 \text{ s}^{-1}$. $v(t)$ er her gitt i m/s og t er gitt i sekund.

Vis hvordan man kan komme fram til at

$$v(t) = 115 e^{-0.1t} - 100 \quad .$$

- c) Kula var 2 m over bakken i det den ble skutt ut. Bruk denne opplysingen, saman med uttrykket for $v(t)$, til å komme fram til ei likning som bestemmer når kula treffer bakken. Du skal *ikke* løse denne likninga.

Oppgave 3

- a) Gitt disse matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad ,$$

rekn ut $A + B$, AB , BA og $2B - 3C$. Dersom noen av uttrykkene ikke er definerte, skal du forklare hvorfor.

- b) Rekn ut determinanten til A . Bruk svaret til å forklare hvorfor A er invertibel.
- c) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + kx_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= l \quad , \end{aligned}$$

bestem parametrene k og l slik at systemet har

- i) entydig løsning
- ii) uendeleg mange løsninger
- iii) ingen løsning .

d) Man kan skrive A på denne måten:

$$A = PDP^{-1} \quad \text{der} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

(Du skal ikke vise dette.) Med utgangspunkt i dette, skriv opp egenvektorene og de tilhørende egenverdiene til A .

Kontroller svaret ditt ved utregning. (Vis at de vektorene du mener er egenvektorer, faktisk *er* egenvektorer.)

e) Vis at

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

f) Med utgangspunkt i uttrykket $A = PDP^{-1}$ kan man regne ut potenser av matrisa A på denne måten:

$$A^n = PD^nP^{-1} .$$

Dersom matrisa A er invertibel, gjelder dette også for negative n . (Du skal ikke vise dette.)

Bruk dette til å finne A^{-1} .

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikninga

$$y' + \frac{\sin x}{y} = 0 .$$

b) Vis hvordan vi kan komme fram til at den generelle løsningen av differensiallikninga

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

er

$$y_h(x) = e^{3x} (A \cos x + B \sin x) .$$

c) Bruk blant annet svaret i b) til å løse initialverdiproblemet

$$y'' - 6y' + 10y = 5x - \frac{1}{2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 .$$

Oppgave 5

- a) Transformasjonen T fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Transformasjonen U fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ er rotasjon $\pi/2 = 90^\circ$ omkring origo (mot klokka).

Forklar hvorfor vi kan skrive transformasjonene som

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{og} \quad U(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

- b) Den lineære transformasjonen W fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$, oppfyller

$$W\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad W\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Bruk dette til å bestemme standardmatrisa til W .