

Oppgave 1

- a) i) Regn ut den deriverte av funksjonen

$$f(x) = \sin x + x^2 \quad .$$

- ii) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int x e^x dx \quad .$$

- b) i) Skriv det komplekse tallet

$$z = 8e^{-\frac{3\pi}{2}i}$$

på kartesisk form.

- ii) Skriv

$$w = -1 + i$$

på polarform.

- c) Finn den naturlige definisjonsmengden til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \ln(4 - x^2) + \frac{1}{\sin x} \quad .$$

- d) Bestem grenseverdiene

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$

Oppgave 2

Gitt funksjonen

$$f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x \quad ,$$

finn alle globale ekstremalpunkter i intervallet $[0, \pi]$. Oppgi både argumentverdi (“ x -verdi”) og funksjonsverdi (“ y -verdi”) for hvert punkt.

Oppgave 3

- a) Finn den generelle løsninga av differensiallikninga

$$y' = y + 5e^x \quad .$$

- b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad .$$

Oppgave 4

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

regn ut A^{-1} , AB og BA . Dersom noen av uttrykkene ikke er definerte, skal du kort forklare hvorfor.

b) Avgjør om vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

c) Dette ligningssystemet er gitt:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Finn verdiene av k som gir ligningssystemet en entydig løsning.

d) Regn ut standardmatrisa til transformasjonen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som representerer en rotasjon med vinkelen $\frac{3\pi}{4}$ mot klokka.

Oppgave 5

Regn ut volumet når området avgrenset av y -aksen, grafene til de to funksjonene $f(x) = \sin(x^2)$ og $g(x) = \cos(x^2)$ og $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ roteres om y -aksen.

Oppgave 6

a) Matrisa

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

er gitt. Vis, ved å finne egenverdiene og egenvektorene til M , hvordan vi kan komme fram til diagonaliseringa

$$M = PDP^{-1} \quad \text{der} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

- b) Mengda av et radioaktivt stoff som vi kaller A, avtar med tida. Denne mengda, $N_A(t)$, følger differensiallikninga

$$N'_A(t) = -4 N_A(t)$$

der tida t er gitt i sekund.

Løs denne differensiallikninga og vis at tida det tar for mengda å bli halvert er $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{4}$ sekund.

- c) Når stoff A sender ut radioaktiv stråling, kan det skje på to måter. Stoff A kan enten gå over i stoff B eller i stoff C. Videre er også stoff B radioaktivt; det går over i stoff C når det sender ut stråling. Mengdene av de ulike stoffene er bestemt av dette settet av differensiallikninger:

$$\mathbf{N}'(t) = M \mathbf{N}(t), \quad \text{der vektoren} \quad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_A(t) \\ N_B(t) \\ N_C(t) \end{bmatrix}$$

og matrisa M er gitt over.

Gitt at $N_A(0) = 1$ og $N_B(0) = N_C(0) = 0$, finn $\mathbf{N}(t)$. Du kan ha nytte av resultatet fra deloppgave a), men oppgava kan også løses uten.

- d) Vis at mengden av stoffene A, B og C til sammen er den samme hele tida. Her kan du bruke svaret fra deloppgave c), men oppgava kan også løses uten.