

Eksamen, DAFE 1000, juni 2019

Løysingsforslag

Oppgave 1

- a) A er ei 3×3 -matrise, B er ei 3×2 -matrise. Siden de har ulike format, er ikke summen $A+B$ definert.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3-2+0 & -2+2 \cdot 2+0 \\ 0-1-2 & 0+2-0 \\ 3 \cdot 3+1+1 & 3 \cdot 2-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Siden B har 2 søyler og A har 3 rader, er ikke produktet BA definert

b) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & b \\ 4 & -a & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & b \\ 0 & -a-10 & 7-2b \end{bmatrix}$$

Uendelig mange løsninger:

- Må ha minst én fri variabel
- Likningssystemet må være konsistent.

Det gir kravet $-a-10=0$ og $7-2b=0$.

$a = -10$ og $b = \frac{7}{2}$.

Vi har entydig løsning når vi har leiende tal både i søyle for x_1 og for x_2 . Altså må vi ha at $-a-10 \neq 0 \Leftrightarrow$

$a \neq -10$.

Oppgave 2

$$iZ = 1 + Z$$

$$iZ - Z = 1$$

$$(i-1)Z = 1$$

$$Z = \frac{1}{i-1} = \frac{1(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-1-i}{2}$$

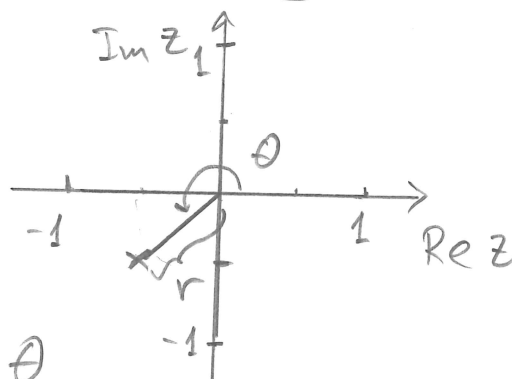
$$Z = \underline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \quad (\text{Kartesiske form}).$$

Polarform:

$$Z = r e^{i\theta}$$

$$\text{der } r^2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{og}$$

$$\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$



Av figuren ser vi at θ skal ligge i 3. kvadrant:

$$\theta = \tan^{-1} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{5\pi}{4}}}$$

Oppgave 3

S1: Vi ser at $f(0) > 0$ og at $f(1) < 0$. Siden f er kontinuerleg på $[0, 1]$, garanterer skjæringssetninga at funksjonen har (minst) eitt nullpunkt på $[0, 1]$ og at vi kan finne dette ved halveringsmetoden.

S2: Tangenten i punktet $(0.5, f(0.5))$ ser ut til å ha eit nullpunkt nær nullpunktet til $f(x)$. Om vi lagar ein ny tangent i nullpunktet til den første tangenten, ser denne ut til å komme enda nærare nullpunktet til f . Newtons metode med $x_0 = 0.5$ ser etter alt å døme ut til å virke her.

S3: Ut frå grafen, ser vi ikkje ut til å ha noko nullpunkt mellom 0 og 0.5. Vidare, siden både $f(0)$ og $f(0.5)$ er positive kan ikkje skjæringssetninga garantere noko nullpunkt. Halv-

eringsmetoden vil ikke fungere med startintervallet $[0, 0.5]$.

S4: Tangenten i punktet $(1.5, f(1.5))$ er nær horisontal. Og den vil ha nullpunkt langt utenfor definisjonsmengde til f . Newtons metode vil ikke fungere med $x_0 = 1.5$.

Oppgave 4

a) I linje 5-7 ser vi at det blir iterert 5 ganger på uttrykket

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$f(x) = \cos x^2 - 2x$ er gitt i linje 2; at funksjonen "fd" i linje 3 faktisk er $f'(x)$ ser vi ved å derivere:

$$f'(x) = -\sin x^2 \cdot (x^2)' - 2 \cdot 1 = -2x \sin x^2 - 2.$$

Dette kjenner vi att som Newtons metode. Denne metoden estimerer ei løsning av likninga $f(x) = 0$.

Problemets skriptet forsøker å løse er altså likninga $\cos x^2 - 2x = 0$.

Start-gjetninga $x_0 = 1$ er gitt i linje 1.

b) Linje 17 kjenner vi att som Eulers metode. Den estimerer løsninga av

startverdi problemet $y' = F(x, y)$ med $y(x_0) = y_0$ gitt. Den tilnærmer $y(x_n)$ med y_n der y_n blir gitt ved iterasjonsformelen

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h \quad \text{der} \quad x_n = x_0 + nh.$$

Her er $F(x,y) = x + \sqrt{y}$ (linje 1) og
startkravet er $y(-2) = 1.2$ (linje 4 og 5).
Steglængde h er bestemt af N i linje 8:
 $h = \frac{x_F - x_0}{N}$ (linje 9), der $x_F = 2$ (linje 6).
 h bør være liten for at metoden skal
gi et godt estimat. Den estimerede
løsninga blir plotta i linje 22.
Problemet vi forsøker å estimere
løsninga av er altså startverdi problemet

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{y} \\ y(-2) = 1.2 \end{cases}$$

Oppgave 5

Formel for volum ved rotasjon om y-aksen:

$$V = 2\pi \int_a^b x |g(x)| dx$$

Her: $a=0$, $b=3$ og $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$$V = 2\pi \int_0^3 x \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

Variabelbyte: $u = x^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$u(0) = 0^2 + 1 = 1, \quad u(3) = 3^2 + 1 = 10$$

$$V = 2\pi \int_{u(0)}^{u(3)} x \frac{1}{u^2} \frac{1}{2x} du = \frac{2\pi}{2} \int_1^{10} u^{-2} du =$$

$$\pi \left[-u^{-1} \right]_1^{10} = -\pi \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{1} \right) = \underline{\underline{\frac{9\pi}{10}}}$$

Oppgave 6

a) Midtpunktsformelen for numeriske derivasjon: $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

$$f'(0.5) \approx \frac{f(0.75) - f(0.25)}{2 \cdot 0.25} = \frac{0.8688 - 0.9845}{0.50} = \underline{\underline{-0.2314}}$$

Trapesmetoden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx 0.25 \left(\frac{1}{2} f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75) + \frac{1}{2} f(1) \right) \\ &= 0.25 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 0.9845 + 0.9394 + 0.8688 + \frac{1}{2} \cdot 0.7788 \right) \\ &= \underline{\underline{0.9205}}. \end{aligned}$$

Simpsons metode kan også brukast her.

b) Taylor-polynom av grad 2:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2$$

Her: $a=0$.

$$f(0) = e^{-0^2/4} = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2/4} \cdot (-x^2/4) = -\frac{1}{2} x e^{-x^2/4}$$

$$f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{2} e^{-x^2/4} - \frac{1}{2} x e^{-x^2/4} \cdot (-\frac{1}{2} x) \\ &= e^{-x^2/4} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f''(0) = e^0 \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = 1 + 0 \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x-0)^2 = \underline{\underline{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

$$f'(0.5) \approx p_2'(0.5)$$

$$p_2'(x) = 0 - \frac{2x}{4} = -\frac{1}{2}x$$

$$p_2'(0.5) = -\frac{1}{2} \cdot 0.5 = \underline{-0.25}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 p_2(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3\right]_0^1 =$$

$$\left[x - \frac{1}{12} x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{12} - 0 = \underline{\frac{11}{12}} \approx 0.91667$$

Eksakt derivert:

$$f'(0.5) = -\frac{1}{2} \cdot 0.5 e^{-0.5^2/4} = -0.25 e^{-0.0625} \approx -0.23485$$

Med fem desimaler

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.92256$$

Vi ser at alle estimater, både dei i a) og i b), er rimelig gode her.

Oppgave 7

$$x'(t) = 0.005N + 0.04 - x(t)$$

a) Dersom x nærmer seg en bestemt verdi når t blir stor, vil $x'(t)$ nærme seg 0. Vi set $x' = 0$ inn i differensiallikningen:

$$0 = 0.005N + 0.04 - x$$

$$x = 0.005N + 0.04$$

Med $N=0$, blir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.005 \cdot 0 + 0.04 = \underline{0.04}.$$

Dette svaret virker jo rimelig; når det ikke er personer i klasserommet bør CO_2 -konsentrasjonen bli like den naturlige konsentrasjonen.

Med $N=20$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.005 \cdot 20 + 0.04 = 0.14.$$

Konsentrasjonen vil altså nærme seg 0.14% med 20 personer i rommet.

b) Vi kan vise at løysinga er rett ved innsetting.

Venstre side:

$$\begin{aligned}x'(t) &= (0.04 + 0.005N(1 - e^{-t}))' = \\&= 0 + 0.005N \cdot (0 - e^{-t} \cdot (-1)) = 0.005N e^{-t}\end{aligned}$$

Høgre side:

$$\begin{aligned}&0.005N + 0.04 - (0.04 + 0.005N(1 - e^{-t})) = \\&0.005N + 0.04 - 0.04 - 0.005N + 0.005N e^{-t} = \\&0.005N e^{-t}.\end{aligned}$$

Vi ser at sidan høgre og venstre side blir like for alle t , er differensial-likninga oppfylt.

Startbetingelse:

$$x(0) = 0.04 + 0.005N(1 - e^{-0}) = 0.04.$$

Dette stemmer også.

Oppgava krevjer ikkje at vi skal komme fram til løysinga sjølv. Men om vi skulle gjort det, kunne vi gjort det slik.

$$x' = 0.005N + 0.04 - x \Leftrightarrow$$

$$x' + x = 0.005N + 0.04$$

Homogen likning: $x' + x = 0$

Antar $x = e^{rt}$ og set inn:

$$r e^{rt} + e^{rt} = 0$$

$$e^{rt} (r+1) = 0$$

$$r+1=0, \quad r=-1.$$

Generell løsning av homogen likning:

$$x_h = C' e^{-t}.$$

- Antar at vi kan finne en partikulær

løsning av den inhomogene likning
som er en konstant: $x=a$ ($x'=0$).

Sett inn:

$$0 + a = 0.005N + 0.04$$

Partikulær løsning: $x_p = 0.005N + 0.04$.

Generell løsning av inhomogen likning:

$$x(t) = x_h + x_p = C' e^{-t} + 0.005N + 0.04$$

Startbetingelse: $x(0) = 0.04$

$$C' e^{-0} + 0.005N + 0.04 = 0.04$$

$$C' + 0.005N = 0, \quad C' = -0.005N$$

Løsning:

$$\begin{aligned} x(t) &= -0.005N \cdot e^{-t} + 0.005N + 0.04 = \\ &= 0.04 + 0.005N(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

$$\text{Krev: } X(1) < 0.10$$

$$0.04 + 0.005N(1 - e^{-1}) < 0.10$$

$$0.005N(1 - e^{-1}) < 0.10 - 0.04 = 0.06$$

$$N < \frac{0.06}{0.005(1 - e^{-1})} = 18.98$$

Altså kan der ikke være mere end
18 personer i rummet.