Eksamen i DAFE1000, august 2019

Løysingsforslag

Oppgåve 1

a) $f(x)=0$ med $f(x) = \cos x^2 - x$.

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$f'(x) = -\sin x^2 \cdot (x^2)' - 1 = -2x \sin x^2 - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n^2 - x_n}{-2x_n \sin x_n^2 - 1}$$

Gitt: $x_0 = 1$

$$x_1 = 1 - \frac{\cos 1^2 - 1}{-2 \cdot 1 \cdot \sin 1^2 - 1} = 0.82866$$

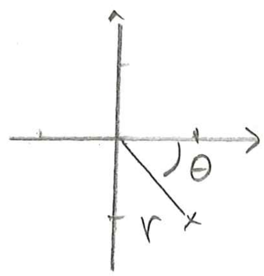
$$x_2 = x_1 - \frac{\cos x_1^2 - x_1}{-2x_1 \sin x_1^2 - 1} = 0.80169$$

$$x_3 = 0.80107$$

Tilnærma løysing: $\underline{x = 0.80107}$

b) $z^3 = 1 - i$

Polar form: $1 - i = r e^{i\theta}$



Ser: $r = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Alternativt: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{-1}{1} = \frac{\pi}{4}$ (θ ligg i 4. kvadrant)

$$z^3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = \left(\sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)}\right)^{1/3} = \sqrt{2}^{1/3} e^{\frac{1}{3} i(-\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)} =$$

$$2^{1/6} e^{i(-\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{2\pi}{3})}$$

$n = 0$:

$$z = \underline{2^{1/6} e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

$n = 1$:

$$z = 2^{1/6} e^{i(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

$n = 2$:

$$z = 2^{1/6} e^{i(-\frac{\pi}{12} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3})} = 2^{1/6} e^{i\frac{15\pi}{12}} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

Oppgåve 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-2 & 1-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$\Leftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativt kan vi rekne ut A^{-1}:

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$[I_3 \mid A^{-1}], \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at matrise som vi skal gange med X (frå venstre) er A:

$$XA - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-2 & 3-1 & 1 \\ 1-4 & 3-2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

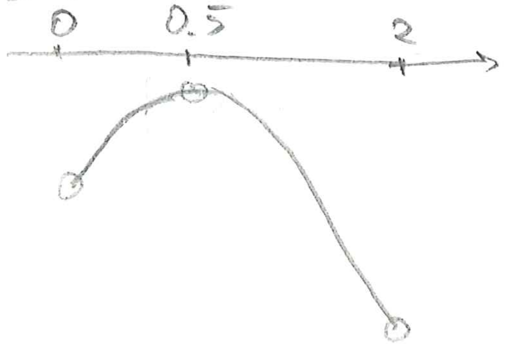
Oppgåve 3

Av grafen ser vi (omtrent) at

$f'(x) > 0$ for $x < 0.5$ og $f'(x) < 0$ for $x > 0.5$.

Vidare har grafen randpunkt for $x = 0$ og for $x = 2$.

Grafen kan skisserast slik:



Av dette ser vi at f har lokalt (og globalt) maksimumspunkt for $x = 0.5$ og at f har lokale minimumspunkt for $x = 0$ og $x = 2$.

Oppgåve 4

a) $y' = y^2 e^{-x}, \quad y(0) = 1$

Differensiallikninga er separabel.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{-x}$$

$$\frac{1}{y^2} dy = e^{-x} dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int e^{-x} dx$$

$$\frac{1}{-2+1} y^{-2+1} = -e^{-x} - C$$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} - C$$

$$\frac{1}{y} = e^{-x} + C$$

$$y = \frac{1}{e^{-x} + C}$$

Startkrav: $y(0) = 1$

$$\frac{1}{e^{-0} + C} = 1$$

$$\frac{1}{1 + C} = 1, \quad C = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x} + 0} = \underline{\underline{e^{x}}}$$

b) $y' = xe^{-x}$, $y(0) = 0$.

Sidan y ikkje er med på høgresida, blir dette rein antiderivasjon. Vi brukar delvis integrasjon:

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1, \quad v' = e^{-x} \Leftarrow v = -e^{-x}$$

$$y = \int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx =$$

$$-xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Startkrav: $y(0) = 0$

$$-0 \cdot e^{-0} - e^{-0} + C = 0$$

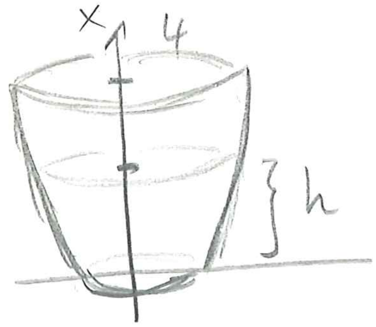
$$-1 + C = 0, \quad C = 1$$

$$y(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = \underline{-e^{-x}(x+1) + 1}$$

Oppgåve 5

$f(x) = \sqrt{1.5 + x}$, $D_f = [0, 4]$

a)



Volumet av væske finn vi ved formelen $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (rotasjon om x-aksen), der $a=0$ og $b=h$.

$V(h) = \pi \int_0^h \sqrt{1.5+x}^{\,2} dx = \pi \int_0^h (1.5+x)\, dx =$

$\pi \left[1.5x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^h = \pi(1.5h + 0.5h^2 - 0) =$

$\underline{\pi(1.5h + 0.5h^2)}$.

Halvfull: $V(h) = \frac{1}{2} V(4)$

$\pi(1.5h + 0.5h^2) = \frac{1}{2}\pi(1.5 \cdot 4 + 0.5 \cdot 4^2)$

$1.5h + 0.5h^2 = 7$

$0.5h^2 + 1.5h - 7 = 0$

$h^2 + 3h - 14 = 0$

$h = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{2}$

Vi må kreve at $h > 0$:

$\underline{h = \frac{\sqrt{65} - 3}{2}} \approx 2.53$, høgda må vere ca. $\underline{2.53 \text{ cm}}$.

b) Startverdiproblem:

$$h' = -\frac{1}{3(1.5+h)}\sqrt{h}$$

$$h(0) = 4.$$

Vi kan estimere løysinga med Eulers metode:

$y(x_n) \approx y_n$ der y_0 er gitt ved startkravet $y(x_0) = y_0$ og

$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)\,h$, $x_n = x_0 + n \cdot h$.

Her er h steglengda (ikkje høgda) og differensiallikninga er $y' = F(x,y)$. I vårt tilfelle er F uavhengig av variabelen x (eller t).

Vi vil vite når h blir null. Difor passar det bra å bruke ei while-løkke i implementeringa. Vi itererar så lenge høgda h er positiv. Når ho sluttar å vere det, skriv vi tida til skjerm.

På neste side er det vist korleis dette kan implementerast i MATLAB.

```
Funk=@(h) -1/(3*(1.5+h))*sqrt(h);
t=0;
h=0;

dt=0.01;        % steglengde

while h>0
    t=t+dt;  % oppdaterar t
    h=h+Funk(h)*dt;   % oppdaterar h
end

t          % Skriv tida til skjerm
```

Skriptet må køyrast med stadig lågare dt-verdiar for å sjekke at svaret er rimeleg uavhengig av dt.

Oppgåve 6

Av linje 8 og linje 10-14 ser vi at dette er <u>trapesmetoden</u> for numerisk integrasjon. Denne går ut på å estimere et integral slik:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n \text{ der}$$

$$T_n = \Delta x \left(\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2} f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_n = a + n \cdot \Delta x.$$

Her er $f(x) = e^{-x^2}$ (linje 1), $a=-1$ (linje 2), $b=1$ (linje 3) og $n=4$ (linje 5).

Når skriptet blir køyrt, blir T_4 skriven til skjerm (linje 16).

Med $\Delta x = \frac{1-(-1)}{4} = 0.5$, $x_0 = -1$, $x_1 = -0.5$ o.s.b. får vi

$$T_4 = 0.5\left(\tfrac{1}{2} f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + \tfrac{1}{2} f(1)\right)$$

$$= 0.5\left(\tfrac{1}{2} e^{-1} + e^{-0.5^2} + 1 + e^{-0.5^2} + \tfrac{1}{2} e^{-1}\right) =$$

$$1.462741 \approx \underline{1.4627}$$

b) Skriptet forsøker å bruke halveringsmetoden for å løyse likninga $f(x) = 0$ der $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{3}}$ (linje 2).

Det tar utgangspunkt i intervallet $[a, b]$ med $a = 0$ (linje 3) og $b = 2$ (linje 4).

Skjæringssetninga garanterer at metoden finn eit nullpunkt for f (med ein gitt presisjon) så lenge

1) $f(a)$ og $f(b)$ har motsett forteikn og

2) f er kontinuerleg på heile $[a, b]$.

Krav 1 er oppfylt. Men ikkje krav 2. Funksjonen er ikkje definert for $x = \sqrt{3}$; sidan den ikkje er definert på heile intervallet, er den heller ikkje kontinuerleg på heile intervallet.