Eksamen i DAFE1000

August 2018

Løysingsforslag

Oppg. 1

$f(x) = x - 2e^x + 5, \quad D_f = [-2, 2]$

a) Randpunkta, for $x = -2$ og $x = 2$, er her ekstremalpunkt.

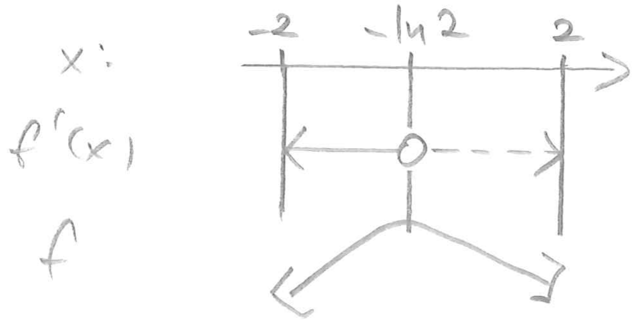
Vidare har vi ekstremalpunkt der $f'(x)$ endrar forteiken.

$f'(x) = 1 - 2e^x + 0 = 1 - 2e^x$

$f'(x) = 0$ gir

$1 - 2e^x = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

Forteiknsskjema



$f(-2) = -2 - 2e^{-2} + 5 = 3 - 2e^{-2} \approx 2.729$

$f(-\ln 2) = -\ln 2 - 2e^{-\ln 2} + 5 = 5 - \ln 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} =$

$4 - \ln 2 \approx 3.307$

$f(2) = 2 - 2e^{2} + 5 = -(2e^{2} - 7) \approx -7.778$

Toppunkt (lokalt og globalt): $\underline{(-\ln 2,\ 4 - \ln 2)}$

Botnpunkt (lokalt): $\underline{(-2,\ 3 - 2e^{-2})}$

Botnpunkt (lokalt og globalt): $\underline{(2,\ -(2e^{2} - 7))}$

b) Halveringsmetoden:

- Halverar intervallet $[a, b]$ n gonger. Om vi vèl midtpunktet til svar til slutt, er presisjonen

$\frac{b-a}{2^{n+1}}$, som her skal vere mindre enn 10^{-5}:

$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-5}$ der $b = 2$ og $a = -2$ i vårt tilfelle

$\frac{2-(-2)}{2^{n+1}} < 10^{-5}$

$\frac{2^{2}}{2^{n+1}} = 2^{2-(n+1)} = 2^{1-n} < 10^{-5}$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{10^5}$$

$$2^{n-1} > 10^5$$

$$n-1 > \frac{\ln 10^5}{\ln 2} = \frac{5 \ln 10}{\ln 2}$$

$$n > \frac{5 \ln 10}{\ln 2} + 1 = 17.610$$

n må vere eit naturleg tal: $n = 18$;

vi treng 18 iterasjonar.

c) Av plottet ser det ut til at $x_0 = 1$ kan vere ein god plass å starte iterasjonan.

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 2e^{x_n} + 5}{1 - 2e^{x_n}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1 - 2e^1 + 5}{1 - 2e^1} = 1.1270$$

$$x_2 = 1.1182$$

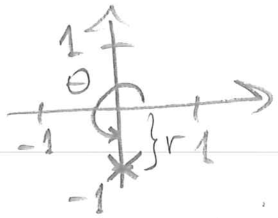
$$x_3 = 1.1181$$

Med 3 desimaler: $\underline{x = 1.118}$.

Oppg. 2

$z^3 = -i$

Vi skriv $-i$ på polarform



$-i = re^{i\theta}$ der $r=1$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$-i = 1e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = e^{i(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi)}$ der n er eit heiltal

$z^3 = e^{i(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi)}$

$z = \left(e^{i(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi)}\right)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\cdot i(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3})}$

$n=0$:

$z = \underline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \underline{i}$

$n=1$:

$z = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})} = \underline{e^{i\frac{7\pi}{6}}} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$

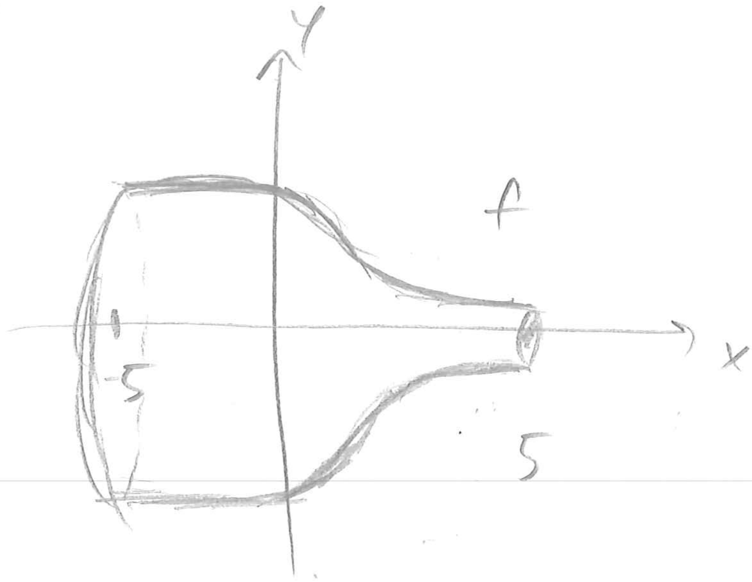
$= -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}$

$n=2$:

$z = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{2\pi}{3})} = \underline{e^{i\frac{11\pi}{6}}} = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$

$= \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}$

Oppg. 3



$$f(x) = 0.7 \arctan(4-3x)+2$$

Volum: $V = \pi \int_{-5}^{5} (f(x))^2 \, dx$

Integralet let seg ikkje bestemmast ved anti-derivasjon. Difor må vi gjere det numerisk. Dette kan for eksempel gjerast ved å implementere trapesmetoden. I MATLAB kan dette kodast slik:

```
f = @(x) 0.7*atan(4-3*x)+2;
a = -5; b = 5;          % grenser
N = 100;                % # delintervall
h = (b-a)/N;
T = h/2*((f(a))^2 + (f(b))^2); % endepunkt
:
```

⋮

```
for n=1:(N-1)
    x=a+n·h
    T=T+h*(f(x))^2;
end

% Skriv svar til skjerm
V=pi*T
```

Når dette skriptet blir køyrd, vil V-estimatet som blir skrive ut, vere avhengig av N-verdien. Denne har vi her sett til 100.

Det er viktig å køyre skriptet fleire gonger med stadig høgare N-verdiar for å kontrollere at svaret er nøyaktig nok.

Oppg. 4

$$v(t) = 50\,(1 - e^{-0.2t})$$

a) Akselerasjonen er den tidsderiverte av farten:

$$a(t) = v'(t) = 50 \cdot (0 - e^{-0.2t} \cdot (-0.2)) =$$

$$50 \cdot 0.2\, e^{-0.2t} = \underline{10\, e^{-0.2t}}$$

Siden farten v er den tidsderiverte av strekninga s ein anti-derivert til v:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = 50 \int (1 - e^{-0.2t})\,dt =$$

$$50 \cdot \left(t - \frac{1}{-0.2} e^{-0.2t}\right) + C =$$

$$50\,(t + 5\, e^{-0.2t}) + C$$

Startkrav: $s(0) = 0$

$$50 \cdot (0 + 5\, e^{0}) + C = 0$$

$$250 + C = 0, \quad C = -250$$

$$s(t) = \underline{50(t + 5\, e^{-0.2t}) - 250}$$

$$= 50\,(t - 5\,(1 - e^{-0.2t}))$$

b) $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.2v \,, \quad v(0) = 0$

Differensiallikninga er separabel:

$$\frac{dv}{10 - 0.2v} = dt$$

$$\int \frac{1}{10-0.2v}\,dv = \int 1\,dt$$

$$\frac{1}{-0.2} \ln|10 - 0.2v| = t + C'$$

$$\ln|0.2v - 10| = -0.2t + C''$$

$$|0.2v - 10| = e^{-0.2t + C''} = e^{C''} \cdot e^{-0.2t}$$

$$0.2v - 10 = \pm e^{C''} \cdot e^{-0.2t} = C''' e^{-0.2t}$$

$$0.2v = 10 + C''' e^{-0.2t}$$

$$v = \frac{10}{0.2} + \frac{C'''}{0.2} e^{-0.2t} = 50 + C e^{-0.2t}$$

Startkrav: $v(0) = 0$

$50 + C e^{0} = 0, \quad C = -50$

$$v(t) = 50 - 50e^{-0.2t} = \underline{50(1 - e^{-0.2t})}$$

□

Oppg. 5

Totalmatrise:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} -1 \\ \\ \leftarrow \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ -1 \end{array}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \\ \\ \end{array}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$x = 1$
$y = -2$
$z = 0$

Oppg. 6

I linje 13 ser vi at $|f(x) - L|$ blir plotta (med logaritmiske aksar) for stadig høgare verdiar av x (linje 10). Funksjonen $f(x)$ er definert i linje 2:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}.$$

Vi ser at $|f(x)-L|$ blir mindre og mindre når x aukar – heilt maskinpresisjonen begynnar å spele ei rolle. Altså er

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1):x^2}{(x^2-x):x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = \underline{1}$$

b) Vi brukar midtpunktsformelen for å estimere $y'(x_1)$:

$$y'(x_1) \approx \frac{-y(x_1-h)+y(x_1+h)}{2\cdot h} =$$

$$\frac{-y(x_0)+y(x_2)}{2\cdot 0.5} = -y(x_0)+y(x_2)$$

$$= -0+y(x_2) = y(x_2).$$

Her har vi brukt startkravet $y(x_0) = y(0) = 0$.

Vi set dette inn i differensial-likninga for $x = x_1 = 0.5$

$$y'(x_1) + \sqrt{x_1}\, y(x_1) = \cos(\pi\cdot x_1)$$

$$y(x_2) + \sqrt{0.5}\, y(x_1) = \cos(\pi\cdot 0.5) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Altså:

$$\sqrt{0.5}\, y(x_1) + y(x_2) = 0$$

For x_2:

$$y'(x_2) \approx \frac{-y(x_2-h)+y(x_2+h)}{2\cdot h} = \frac{-y(x_1)+y(x_3)}{1}$$

Når vi set dette i differensiallikninga, får vi

$$-y(x_1)+y(x_3)+\sqrt{x_2}\, y(x_2) = \cos(\pi\cdot x_2)$$

$$-y(x_1)+y(x_2)+y(x_3) = -1$$

Tilsvarande får vi følgande for x_3:

$$\frac{-y(x_2)+y(x_4)}{1} + \sqrt{x_3}\, y(x_3) = \cos(\pi\cdot x_3)$$

$$-y(x_2)+\sqrt{1.5}\, y(x_3)+y(x_4) = 0$$

Sidan x_5 og $y(x_5)$ ikkje skal inngå i likningssystemet, brukar vi no den andre formelen for å estimere $y'(x_4)$:

$$y'(x_4) \approx \frac{y(x_4-2h)-4y(x_4-h)+3y(x_4)}{2h} =$$

$$\frac{y(x_2)-4y(x_3)+3y(x_4)}{1}$$

Vi set inn og får

$$-y(x_2) - 4y(x_3) + 3y(x_4) + \sqrt{x_4}\, y(x_4) = \cos(\pi \cdot x_4)$$

$$y(x_2) - 4y(x_3) + (3+\sqrt{2})\, y(x_4) = 1$$

Alt i alt:

$$\sqrt{0.5}\, y(x_1) + y(x_2) = 0$$

$$-y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) = -1$$

$$0 - y(x_2) + \sqrt{1.5}\, y(x_3) + y(x_4) = 0$$

$$0 \quad y(x_2) - 4y(x_3) + (3+\sqrt{2})\, y(x_4) = 1$$

eller

$$\begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{1.5} & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \\ y(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså:

$$\underline{A = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{1.5} & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$