Eksamen i matematikk 1000

Oktober 2017

Løysingsforslag

Oppg. 1

a) $\int_0^4 (\sqrt{x} + \cos(\pi x))dx = \int_0^4 x^{1/2}dx + \int_0^4 \cos(\pi x)dx$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}[x^{1/2+1}]_0^4 + \frac{1}{\pi}[\sin(\pi x)]_0^4 =$

$\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^4 + \frac{1}{\pi}(\sin(4\pi) - \sin 0) =$

$\frac{2}{3}(4^{3/2} - 0) + 0 = \underline{\frac{16}{3}}$

b) $\int_0^2 x\, e^{-x^2} dx$

Variabelbyte: $u = -x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$, $dx = \frac{1}{-2x}du$

$u(0) = 0$

$u(2) = -2^2 = -4$

$\int_0^2 x\, e^{-x^2}dx = \int_0^{-4} x\, e^u \frac{1}{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-4} e^u du =$

$\frac{1}{2}\int_{-4}^0 e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-4}^0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-4}) = \underline{\frac{1-e^{-4}}{2}}$

Oppg. 2

a) $z^2 - 4z + 8 = 0$

$$z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16}\, i}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = \underline{2 \pm 2i}$$

Løysingar:

$\underline{z_1 = 2 - 2i, \ z_2 = 2 + 2i}$ (kartesisk form)

Polarform: $z = re^{i\theta}$

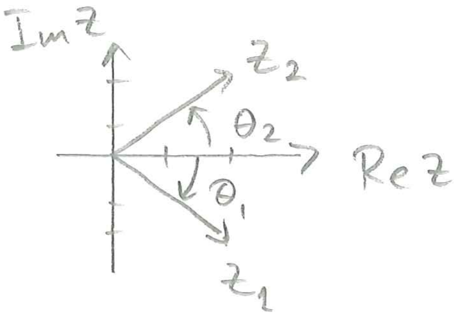
For både z_1 og z_2:

$r^2 = 2^2 + (\pm 2)^2 = 8$

$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

For $z_1 = 2 - 2i$: $\tan \theta_1 = \frac{-2}{2} = -1$

For $z_2 = 2 + 2i$: $\tan \theta_2 = \frac{2}{2} = 1$



$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}, \ \theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$\underline{z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}, \ \underline{z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

b) $y'' - 4y' + 8y = e^x$

- Løyser homogen likning først;

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

- Går ut frå at $y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ slik at

$$r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 8e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (r^2 - 4r + 8) = 0$$

$$r^2 - 4r + 8 = 0$$

Denne likninga løyste vi i oppg. 2a)

$r_1 = 2 - 2i$, $r_2 = 2 + 2i$

Generell løysing av homogen likning:

$$y_h = e^{2x} (A \cos(2x) + B \sin(2x))$$

- Går ut frå at vi kan finne ei partikulær løysing av den inhomogene likninga på forma $y_p = ae^x$.

$$y_p' = y_p'' = y_p = ae^x$$

Set inn:

$$ae^x - 4 \cdot ae^x + 8ae^x = e^x$$

$$5ae^x = e^x$$

$5a = 1$

$a = \frac{1}{5}$

$y_p = \frac{1}{5} e^x$

Generell løysing: $y = y_p + y_h$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^x + e^{2x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$

Oppg. 3

Differensiallikeninga er separabel

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos x \, dx$$

$$\int y^{-2} dy = \sin x + C'$$

$$\frac{1}{-2+1} y^{-2+1} = \sin x + C'$$

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C'$$

$$\underline{y = -\frac{1}{\sin x + C'}}$$

Kontroll:

Høgre side:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sin x + C'}\right) = -\frac{d}{dx}(\sin x + C')^{-1} =$$

$$-(-1)(\sin x + C')^{-2} \cdot (\sin x + C')' =$$

$$\left(\frac{1}{\sin x + C}\right)^2 (\cos x + 0) = \left(\frac{1}{\sin x + C'}\right)^2 \cdot \cos x$$

Venstre side:

$$y^2 \cos x = \left(-\frac{1}{\sin x + C'}\right)^2 \cos x = \left(\frac{1}{\sin x + C'}\right)^2 \cos x$$

Oppg. 4

a) Skjæringssetninga seier at dersom f(x) er kontinuerleg på [a, b] og f(a) og f(b) har ulike forteikn, vil f(x) ha minst eitt nullpunkt i intervallet [a, b].

Dette garanterar at halveringsmetoden vil estimere ei løysing så nøyaktig vi måtte ønske.

b) Dette er ei implementering av Newtons metode. Denne går ut på å estimere ei løysing av likninga $f(x) = 0$ ved først å gjette på ein x_0 og så iterere på $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Her er $x_0 = 1$ (linje 1) og $f(x) = x^2 - \cos x$ (linje 2).

Vi kontrollerer at $f'(x)$ gir uttrykket i nemnaren i linje 4:

$f'(x) = 2x - (-\sin x) = 2x + \sin x.$

Vi forsøker altså å løyse likninga

$$\underline{x^2 - \cos x = 0.}$$

Med 3 iterasjonar (linje 3) blir x_1, x_2, x_3 og x_4 skrivne til skjerm.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - \cos x_0}{2x_0 + \sin x_0} =$$

$$1 - \frac{1^2 - \cos 1}{2 \cdot 1 + \sin 1} = 0.83822$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - \cos x_1}{2x_1 + \sin x_1} = 0.82424$$

$$x_3 = \ldots = 0.82413$$

Oppg. 5

a) Med $a=1$:

$$2x + y = 4$$
$$-x + 7y = -17$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 7 & -17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & -17 \\ 0 & 15 & -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \frac{1}{15} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-1) \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{x = 3, \ y = -2}$

Kontroll:

$2 \cdot 3 + (-2) = 4$

$-3 + 7 \cdot (-2) = -17$

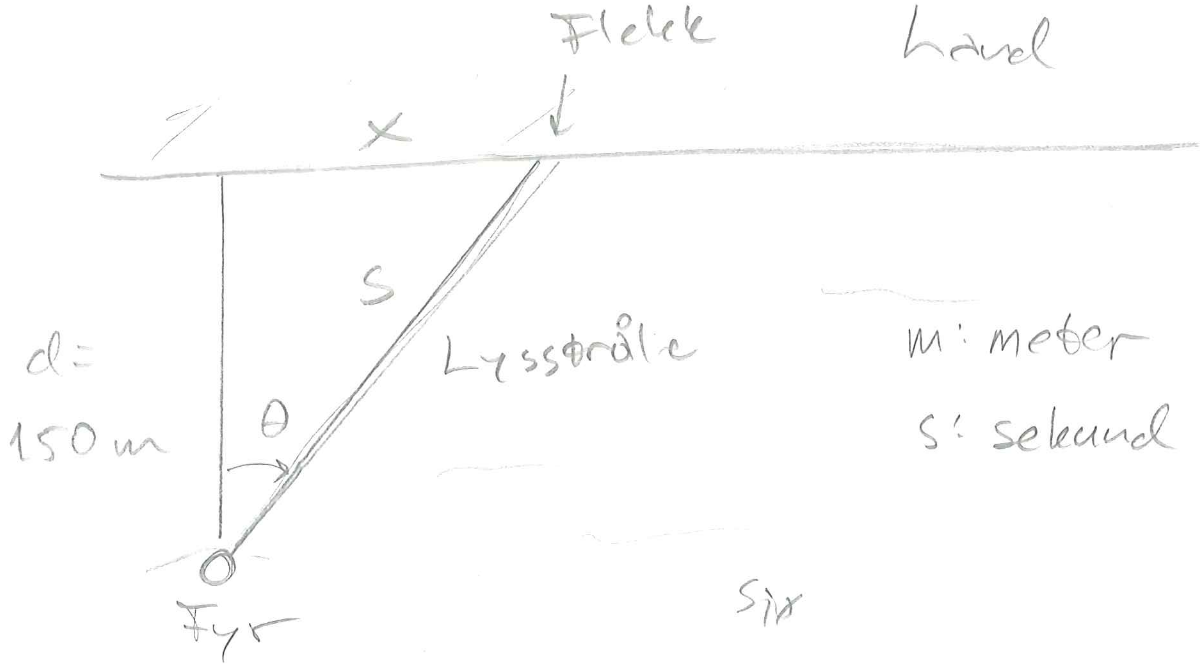
b) Totalmatrise med generell a:

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ -1 & 7 & -17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 & -17 \\ 0 & a+14 & -30 \end{pmatrix}$$

Dersom $a+14=0$, vil nederste rekke tilsvare likninga „$0x + 0y = -30$", som ikkje har noko løysing.

Altså: Inga løysing når $a+14=0 \Leftrightarrow \underline{a=-14}$.

Oppg. 6



m: meter
s: sekund

Gitt: $\theta'(t) = \frac{2\pi}{7s}$

Ser: $\frac{x}{d} = \tan\theta$, $x = d \cdot \tan\theta$ (for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$).

Vi deriverar med omsyn på tida og brukar kjerneregelen:

$$x'(t) = d \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \theta'(t)$$

(d er konstant).

Ser: $\cos\theta = \frac{d}{s}$

$$x'(t) = d \cdot \frac{1}{(\frac{d}{s})^2} \theta'(t) = \frac{d\,\theta'(t)}{\frac{d^2}{s^2}} = \frac{s^2}{d}\theta'(t)$$

Når avstanden $s = 500\,m$, har flekken farten

$$x'(t) = \frac{(500\,m)^2}{150\,m} \cdot \frac{2\pi}{7s} = \frac{1000\pi}{21}\,m/s \approx \underline{1496\,m/s}.$$