Eksamen i matematikk 1000

August -17

Løysingsforslag

Oppgåve 1

a) A har 2 søyler, C har 3 rekker.
Produktet AC er ikkje definert.

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 & 1\cdot 2 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + (-4)\cdot 2 & 1\cdot 2 + (-4)\cdot 0 & 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$B + C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 2+2 & 0+3 & -2+(-4) \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$I_2 X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 - 0 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ -1 + 2 & -2 + 0 & -3 - 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 6 & 13 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}}$$

Oppgave 2

a) Akselerasjonen $a(t) = v'(t)$

Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon:

$$a(2) = v'(2) \approx \frac{v(2+1) - v(2-1)}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{v(3) - v(1)}{2} = \frac{16.1 - 9.4}{2} = 3.35$$

Akselerasjonen er $\underline{\text{ca. } 3.4 \text{ m/s}^2}$

$$a(2.5) = v'(2.5) \approx \frac{v(2.5+0.5) - v(2.5-0.5)}{2 \cdot 0.5} =$$

$$\frac{v(3) - v(2)}{1} = 16.1 - 13.0 = 3.1$$

Akselerasjonen er ca. $3.1 \, m/s^2$.

Frå t_1 til t_2 har bilen flytte seg lengda $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

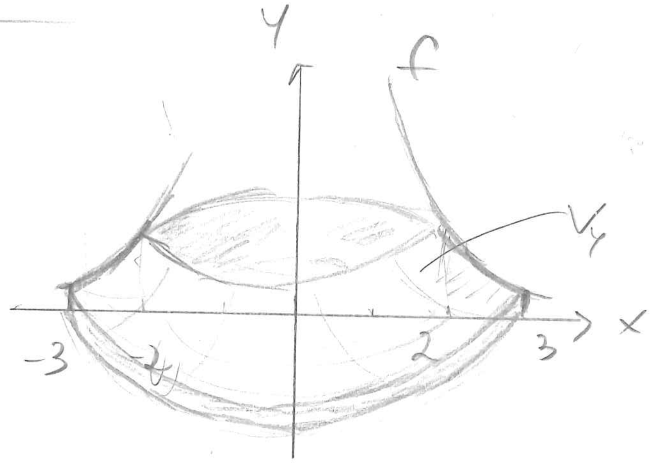
Trapesmetoden:

$$\int_0^4 v(t)\,dt \approx 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot v(0) + v(1) + v(2) + v(3) + \tfrac{1}{2} \cdot v(4)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 6.1 + 9.4 + 13.0 + 16.1 + \tfrac{1}{2} \cdot 16.9 = 50$$

Bilen har flytta seg ca. 50 m.

Oppgåve 3



Volum:

$$V_y = 2\pi \int_2^3 x\, f(x)\,dx = 2\pi \int_2^3 \frac{x}{2x-3}\,dx =$$

$$2\pi \int_2^3 \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x-\frac{3}{2}}\,dx = \pi \int_2^3 \frac{x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{x - \frac{3}{2}}\,dx =$$

$$\pi \int_2^3 \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}\right)dx = \pi \left[x + \frac{3}{2}\ln\left|x - \frac{3}{2}\right|\right]_2^3 =$$

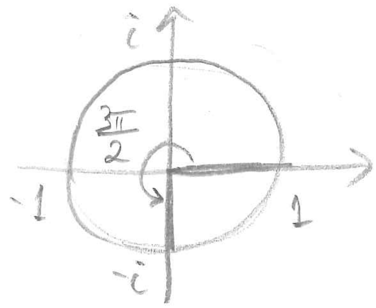
$$\pi \left[3 + \frac{3}{2}\ln\left(3-\frac{3}{2}\right) - \left(2 + \frac{3}{2}\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)\right)\right] =$$

$$\pi \left[1 + \frac{3}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2}\right)\right] = \pi\left(1 + \frac{3}{2}\ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$$

$\underline{\pi\left(1+\frac{3}{2}\ln 3\right)}$

Her kunne vi også ha gjort variabelbyttet $u = 2x-3$ og så skrive x i telleren som $\frac{u+3}{2}$.

Oppgave 4



$$z^3 = -i = 1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)}\right)^{1/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2}{3}\pi\right)}$$

$n=0$:

$$z = \underline{e^{i\frac{\pi}{2}}} \; (= i)$$

$n=1$:

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)} = \underline{e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

$n=2$:

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)} = \underline{e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

Oppgave 5

Differensiallikninga er separabel

$$y e^{x} \frac{dy}{dx} = x e^{-y^2}$$

$$y e^{y^2} dy = x e^{-x} \quad \text{(gangar med } e^{y^2} \text{ og } e^{-x}\text{)}$$

$$\int y e^{y^2} dy = \int x e^{-x} dx$$

Variabelbyte: $u = y^2$, $\frac{du}{dy} = 2y$, $dy = \frac{du}{2y}$

$$\int y e^{y^2} dy = \int \cancel{y} e^{u} \frac{du}{2\cancel{y}} = \frac{1}{2}\int e^{u} du = \frac{1}{2} e^{u} + C_1 =$$

$$\frac{1}{2} e^{y^2} + C_1$$

Delvis integrasjon: $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \Leftarrow v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx =$$

$$-x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C_2 =$$

$$-e^{-x}(x+1) + C_2$$

Vi får:

$$\frac{1}{2} e^{y^2} + C_1 = -e^{-x}(x+1) + C_2$$

$$e^{y^2} = -2 e^{-x}(x+1) + C \qquad (C = 2(C_2 - C_1))$$

$$y^2 = \ln\left(C - 2e^{-x}(x+1)\right)$$

$$y = \pm\sqrt{\ln(C - 2e^{-x}(x+1))}$$

Oppgåve 6

I for-løkka frå og med linje 8 til linje 11 ser vi at vi reknar ut ein venstre Riemann-sum (på ein regulær partisjon):

$$R = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x \cdot f(x_i), \quad x_i = a + i \cdot \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

Grensene a og b er gitt i linje 2, funksjonen $f(x) = x^2 - x$ er gitt i linje 1.

Når N (linje 4) aukar, vil R nærme seg integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 (x^2 - x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 =$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot 2^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - 0 = \tfrac{8}{3} - 2 = \underline{\tfrac{2}{3}}$$

Oppgåve 7

a) Endringsrate: $F'(0)$

Differensiallikninga gir at

$F'(0) = 0.05 F(0) - 0.02 \cdot 0 = 0.05 \cdot 9 = 0.45$

Endringsrate er 0.45 millionar per år.

(Vi har brukt at $F(0) = 9$.)

Generelt må vi alltid ha at $F(0) > 0$; noko anna gir ikkje meining.

Difor vil også endringsrate ved starten,

$F'(0) = 0.05 F(0)$ alltid vere positiv; grafen til F vil alltid stige ved $t = 0$. Difor kan ikkje kurve C vere ei løysing av differensiallikninga.

b) Med $F(t) = A e^{0.05t} + \frac{2}{5}t + 8$:

$F'(t) = A e^{0.05t} \cdot 0.05 + \frac{2}{5} \cdot 1 + 0 =$

$0.05 A e^{0.05t} + \frac{2}{5}$

Høgre sida i differensiallikninga:

$$0.05F(t) - 0.02t =$$
$$0.05 \cdot (Ae^{0.05t} + \tfrac{2}{5}t + 8) - 0.02t =$$
$$0.05Ae^{0.05t} + 0.05 \cdot \tfrac{2}{5}t + 0.05 \cdot 8 - 0.02t =$$
$$0.05Ae^{0.05t} + 0.02t + \tfrac{2}{5} - \cancel{0.02t} =$$
$$0.05Ae^{0.05t} + \tfrac{2}{5} = \underline{F'(t)}$$

Når t blir stor, vil $e^{0.05t}$ bli mykje større enn $\frac{2}{5}t + 8$. Utviklinga på lang sikt blir difor bestemt av om $Ae^{0.05t}$-leddet er positivt eller negativt. Dersom A er negativ, vil folketalet kollapse. $F(t)$ vil falle og bli 0 (og negativ, matematisk sett).

For at folketalet ikkje skal kollapse, må vi krevje at $A \geq 0$

Vidare:

$$F(0) = Ae^{0.05 \cdot 0} + \tfrac{2}{5} \cdot 0 + 8 = A + 8$$

$$A = F(0) - 8$$

Med $A \geq 0$ får vi kravet

$$F(0) - 8 \geq 0 \Leftrightarrow F(0) \geq 8.$$

Folketalet må vere <u>minst 8 millionar.</u>

Oppgåve 8

Fig 1) har tre ekstremalpunkt. Om ein av dei andre figurane er den deriverte av denne, må den ha tre nullpunkt. Då dette ikkje er tilfelle, må figur 1) vere $f'(x)$.

Då $f'(x)$ er null og endrar forteiken for $x \approx 4.5$ og for $x \approx 3.5$, må f ha ekstremalpunkt her. Det har fig. 3).

Vidare stemmer monotonieigenskapene for fig. 2) med fig 3); $F(x)$ veks når $f(x) > 0$ (x mellom 0 og 6.5 og frå ca. 8) og avtar når $f(x) < 0$.

Altså:

Fig 1) er $f'(x)$, fig. 2) er $F(x)$ og fig. 3) er $f(x)$.