

Ekamen i matematikk 1000
(TRFE 1000), oktober 2016

Løysingsforslag

Oppgave 1

$$a) (x^{3/2} + e^{\sqrt{x}})' = \frac{3}{2} x^{3/2-1} + e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$$
$$\underline{\underline{\frac{3}{2} x^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \left(= \frac{3x + e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \right)}}$$

$$\begin{aligned} (\ln x \cdot \sin x^2)' &= (\ln x)' \sin x^2 + \ln x \cdot (\sin x^2)' \\ &= \frac{1}{x} \sin x^2 + \ln x \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' = \\ &\underline{\underline{\frac{\sin x^2}{x} + 2x \ln x \cdot \cos x^2}} \end{aligned}$$

$$b) \int_0^1 x e^{2x^2} dx$$

Variabelbyte: $u = 2x^2$

$$\frac{du}{dx} = 4x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{4x} du$$

$$x=0 \Rightarrow u=0, \quad x=1 \Rightarrow u=2$$

$$\int_0^1 x e^{2x^2} dx = \int_{u(0)}^{u(1)} x e^u \cdot \frac{1}{4x} du = \frac{1}{4} \int_0^2 e^u du =$$

$$\frac{1}{4} [e^u]_0^2 = \underline{\underline{\frac{e^2 - 1}{4}}}$$

c) Taylor-polynom: $P_2 = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2} f''(a)x^2$

med $a=0$.

$$f(0) = e^0 - \sin^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x - \cos x$$

$$\circ f'(0) = e^0 - \cos 0 = 0$$

$$f''(x) = e^x - (-\sin x) = e^x + \sin x$$

$$f''(0) = e^0 + \sin 0 = 1$$

$$P_2 = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x^2 = \underline{\underline{1 + \frac{1}{2}x^2}}$$

d) $y' = x\sqrt{y}, \quad y(0)=0$

$$\frac{dy}{dx} = x y^{1/2}$$

$$y^{-1/2} dy = x dx$$

$$\int y^{-1/2} dy = \int x dx$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} y^{-1/2+1} = \frac{1}{2} x^2 + C'$$

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2} x^2 + C'$$

$$y = \left(\frac{1}{4} x^2 + C\right)^2$$

$$(C = \frac{1}{2} C')$$

Startbetingelse: $y(0) = 0$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 0^2 + C_1\right)^2 = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 0\right)^2 = \frac{1}{16}x^4$$

Startverdi problemet har ikke entydig løsning. Det har også den trivielle løsning $y = 0$ (for alle x).

○ Altså: $y = \frac{1}{16}x^4$ eller $y = 0$.

(Det var et uheldig trekk ved oppgaven at startverdi problemet ikke hadde entydig løsning. Ved sensurering fekk ingen kandidater trekk for å ikke ta med $y = 0$ -løsningene.)

Oppgave 2

$$f(x) = 2\cos(\pi x) - x$$

a) f er elementær og definert på hele intervallet. Derfor er f også kontinuerlig på intervallet.

$$f(0) = 2\cos 0 - 0 = 2 > 0$$

$$\circ f(1) = 2\cos \pi - 1 = -3 < 0$$

f har minst ett nullpunkt på $[0, 1]$ ved skjæringssetninga.

$$f'(x) = -2\pi \sin(\pi x) - 1$$

For $x \in [0, 1]$ er $\pi x \in [0, \pi]$.

$\sin(\pi x)$ er positiv på hele intervallet. Derfor er $f'(x) = -(2\pi \sin(\pi x) + 1)$ negativ på hele intervallet. Siden f altså er strengt avtakende på $[0, 1]$, kan funksjonen ha maksimalt ett nullpunkt.

Derfor har f nøyaktig ett nullpunkt på $[0, 1]$.

b) - Vi har ei løsning mellom 0 og 1.

$$\text{Midtpunkt: } \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$f(0.5) = 2 \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$(f(0) > 0 \text{ og } f(1) < 0)$$

- Har løsning mellom 0 og 0.5

$$\text{Nytt midtpunkt: } \frac{0+0.5}{2} = 0.25$$

$$\circ \quad f(0.25) = 2 \cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \sqrt{2} - \frac{1}{4} = 1.164 > 0$$

- Løsning mellom 0.25 og 0.5.

$$\text{Nytt midtpunkt: } \frac{0.25+0.5}{2} = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$f(0.375) = 2 \cos (\pi \cdot 0.375) - 0.375 = 0.3904 > 0$$

- Har løsning mellom 0.375 og 0.5

$$\text{- Vél løysinga } \frac{0.375+0.5}{2} = \frac{7}{16} = 0.4375$$

$$\text{Feilen er avgrensa av } \frac{0.5-0.375}{2} = 0.0625$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 f(x) dx$$

Trapesmetoden: $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx T_4$ der

$$T_4 = \frac{1-(-1)}{4} \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + \frac{1}{2} f(1) \right)$$

$$f(-1) = 2 \cos (-\pi) - (-1) = -1$$

$$f(-0.5) = 2 \cos \frac{\pi}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$f(0), f(0.5), f(1): \text{ Sjå b)$$

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} + 2 + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (-3) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \underline{0} \end{aligned}$$

Nøyaktig svar:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 \cos(\pi x) dx - \int_{-1}^1 x dx =$$

$$\frac{2}{\pi} [\sin(\pi x)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^1 = \underline{0}$$

I dette tilfellet gav altså trapesmetoden eksakt rett svar. (Slike er det sjeldenvis ikke vanlegvis.)

Oppgave 3

a) $-3y' + 2y = 2$

○ Tre måter:

1) Ved integrerende faktør.

2) Ved å finne partikulær løsning og så løse den tilsvarende homogene løsning ved å gå ut fra løsning på eksponentialform.

3) Som separabel differensiallikning.

$$1) \quad y' - \frac{2}{3}y = -\frac{2}{3}$$

Integrerende faktor: $e^{-\frac{2}{3}x}$

$$e^{-\frac{2}{3}x} (y' - \frac{2}{3}y) = e^{-\frac{2}{3}x} \cdot (-\frac{2}{3})$$

$$(e^{-\frac{2}{3}x} y)' = -\frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$e^{-\frac{2}{3}x} y = \int -\frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} dx = -\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) e^{-\frac{2}{3}x} + C$$

$$e^{-\frac{2}{3}x} y = e^{-\frac{2}{3}x} + C$$

$$y = \underline{1 + C e^{\frac{2}{3}x}}$$

2) - Gär ut frå at ein konstant løn vere løysing: $y_p = a$

$$y_p' = 0$$

$$\text{Set inn: } -3 \cdot 0 + 2 \cdot a = 2$$

$$a = 1$$

$$y_p = 1$$

Homogen løysing: $-3y_h' + 2y_h = 0$

Gär ut frå at $y_h = e^{rx}$

$$y_h' = r e^{rx}$$

$$\text{Set inn: } -3 \cdot r e^{rx} + 2 e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (-3r + 2) = 0$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Generell løsning av homogen likning:

$$y_h = C e^{\frac{2}{3}x}$$

Løsning: $y = y_p + y_h = \underline{1 + C e^{\frac{2}{3}x}}$

$$3) \quad -3 \frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

$$-3 \frac{dy}{dx} = 2 - 2y = 2(1-y)$$

$$\frac{dy}{1-y} = -\frac{2}{3} dx$$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int -\frac{2}{3} dx$$

$$-\ln|1-y| = -\frac{2}{3}x + C'$$

$$\ln|y-1| = \frac{2}{3}x - C'$$

$$|y-1| = e^{\frac{2}{3}x - C'}$$

$$y-1 = \pm e^{\frac{2}{3}x - C'} = \pm e^{-C'} e^{\frac{2}{3}x} = C e^{\frac{2}{3}x}$$

$$y = \underline{1 + C e^{\frac{2}{3}x}}$$

$$b) \quad y'' - 3y' + 2y = 2$$

Vi løser denne på samme måte som metode 2 i deloppgave a).

Partikulær løsning: $y_p = a$

$$y_p' = y_p'' = 0$$

$$\text{Sett inn: } 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot a = 2, \quad a = 1$$

$$y_p = 1$$

$$○ \quad \text{Homogen likning: } y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$$

- Løs ut frø at $y_h = e^{rx}$

$$y_h' = r e^{rx}, \quad y_h'' = r^2 e^{rx}$$

$$\text{Sett inn: } r^2 e^{rx} - 3r e^{rx} + 2e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (r^2 - 3r + 2) = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Generell løsning av homogen likning:

$$y_h = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} = A e^x + B e^{2x}$$

Løsning:

$$y = y_p + y_h = \underline{1 + A e^x + B e^{2x}}$$

Oppgave 4

$$a) AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) \\ -3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 4-0 & 6+0 \\ 0-9 & 0-6 & 0+3 \\ 2+18 & 4+12 & 6-6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -9 & -6 & 3 \\ 20 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{+3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 8 \end{array} \right) \xleftarrow{\frac{1}{4}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 2 \end{array} \right)$$

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

$$x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 2, \quad x_3 \text{ er fri}$$

$$x_1 = 2x_3$$

$$x_2 = 2 - \frac{5}{2}x_3$$

x_3 er fri

c) $B\vec{x} = \vec{b}$ der $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (ulik " $\vec{b}$ " i deloppgave b)).

Det enklaste val er å gjøre likninga homogen, $\vec{b} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I så fall vil den trivielle løsning $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gjelde.

Oppgave blir mer interessant om

vi krever at $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Med $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ får vi tallmatrisa

$$(B|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & b_1 & -1 \\ 0 & 3 & b_2 & 1 \\ 2 & -6 & b_3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & b_1 & -1 \\ 0 & 3 & b_2 & 1 \\ 0 & -6 & b_3 - b_1 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & b_1 & -1 \\ 0 & 3 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_1 + 2b_2 & 0 \end{array} \right)$$

Vi ser at likeningssystemet har
løsning (er konsistent) hvis og bare
hvis $b_3 - b_1 + 2b_2 = 0$. Ett mogelig
val av slike b_i -verdier kan vere
 $b_1 = b_3 = 1, b_2 = 0$ slik at $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oppgave 5

$$v'(t) = -10 - 0.10 v$$

a) Dersom steinen skal nærme seg
ein bestemt fart (v skal gå mot
ein konstant), vil akselerasjonen gå
mot null, $v'(t) \rightarrow 0$.

$v'(t) = 0$ sett inn i differensiallikninga
gir

$$0 = -10 - 0.10 v \Leftrightarrow v = \frac{10}{-0.10} = -100.$$

Maksimalfarten blir altså 100 m/s
(nedover).

b) startkrav: $U(0) = 20$

$$\frac{dU}{dt} = -0.10 \left(U + \frac{10}{0.10} \right) = -0.10 (U + 100)$$

$$\frac{dU}{U+100} = -0.10 dt$$

$$\int \frac{dU}{U+100} = \int -0.10 dt$$

$$\ln |U+100| = -0.10t + C'$$

$$U+100 = \pm e^{-0.10t+C'} = C' e^{-0.10t}$$

$$(C' = \pm e^{C'})$$

$$U = C' e^{-0.10t} - 100$$

Startkrav: $U(0) = 20$

$$C' e^0 - 100 = 20$$

$$C' = 120$$

$$\underline{U(t) = 120 e^{-0.10t} - 100}$$

c) Højde: $h(t)$. Vi ved at $h'(t) = U(t)$

Når stenen er på det højste:

$$h'(t) = U(t) = 0$$

$$120 e^{-0.10t} - 100 = 0$$

$$e^{-0.10t} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$-0.10 t = \ln \frac{5}{6}$$

$$t = \frac{\ln \frac{5}{6}}{-0.10} = 10 \ln \frac{6}{5} = 1.8232$$

Steinen er høgest oppe etter ca. 1.82 s.

Høgde h er integralet av farten,

$$h(t) - h(0) = \int_0^t v(t) dt.$$

$$\text{Gitt: } h(0) = 0.$$

$$h = \int_0^{10 \ln \frac{6}{5}} (120 e^{-0.10t} - 100) dt =$$

$$120 \cdot \left(-\frac{1}{0.10}\right) [e^{-0.10t}]_0^{10 \ln \frac{6}{5}} - 100 \cdot (10 \ln \frac{6}{5} - 0) =$$

$$-1200 (e^{-0.10 \cdot 10 \cdot \ln \frac{6}{5}} - e^0) - 1000 \ln \frac{6}{5} =$$

$$1200 \left(1 - \frac{5}{6}\right) - 1000 \ln \frac{6}{5} =$$

$$200 - 1000 \ln \frac{6}{5} = 17.678$$

Steinen når ca. 17.68 m over bakken

Oppgave 6

$$a) \quad X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\circ \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 1 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = X I_2 = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\ominus \quad \begin{pmatrix} 16-3 & -4+1 \\ 0-6 & -0+2 \\ 4-12 & -1+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -6 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$b) \quad T(\vec{x}) = A \vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = A \vec{u} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+12 \\ -18+20 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}} (= \vec{u})$$

$$T(\vec{x}) = \vec{b}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

Totalmatrise

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} -11 & 6 & 4 \\ -18 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xleftarrow{-\frac{18}{11}} \sim \begin{pmatrix} -11 & 6 & 4 \\ 0 & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} \end{pmatrix} \xleftarrow{\frac{11}{2}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xleftarrow{-6} \sim \begin{pmatrix} -11 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xleftarrow{-\frac{1}{11}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 7

a) $z^2 + 6z + 10 = 0$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} \\ = -3 \pm i$$

$$\underline{z = -3 - i \text{ eller } z = -3 + i.}$$

b) $z^3 = 3 + 3i = 3(1 + i) =$

Polar form: $1 + i = r e^{i\theta}$ med

$$r^2 = 1^2 + 1^2, \quad r = \sqrt{2} \quad \text{og} \quad \tan \theta = \frac{1}{1} = 1.$$

Med θ i første kvadrant:

$$\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$z^3 = 3 \cdot \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)}$$

$$z = \left(3\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi)} \right)^{1/3} = \left(\sqrt{3^2 \cdot 2} \right)^{1/3} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}n \cdot \pi)}$$

$$= 18^{1/6} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}n\pi)}$$

$n=0:$

$$z = \underline{18^{1/6} e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

$n=1:$

$$z = 18^{1/6} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi)} = \underline{18^{1/6} e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$n=2:$

$$z = 18^{1/6} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi)} = \underline{18^{1/6} e^{i\frac{17\pi}{12}}}$$

Oppgave 8

Av linje 14 ser vi at dette er en implementering av Eulers metode.

Denne går ut på å finne en tilnærmet løsning av startverdi problemet

$$y'(x) = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{ved} \quad y(x_n) \approx y_n$$

der $y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h$,

der h er steglengde og $x_n = x_0 + n \cdot h$.

Av linje 14 ser vi at $F(x, y) = x - \sqrt{y}$.

Startbetingelsen er gitt i linje 2 og 4:

$$x_0 = 0, \quad y(x_0) = 1.$$

Skriptet forsøker altså å løse dette startverdi problemet:

$$\underline{y' = x - \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.}$$