

Eksamen i matematikk 1000, oktober 2016

Oppgave 1

a) Bestem de deriverte av disse uttrykkene

- $x^{3/2} + e^{\sqrt{x}}$
- $\ln x \cdot \sin x^2$.

b) Bestem integralet $\int_0^1 x e^{2x^2} dx$.

c) For funksjonen $f(x) = e^x - \sin x$, bestem Taylor-polynomet av 2. orden omkring $x = 0$.

d) Bestem løsninga av dette startverdiproblemet (*initialverdiproblemet*):

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0 \quad .$$

Oppgave 2

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = 2 \cos(\pi x) - x \quad .$$

a) Forklar hvorfor f har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[0, 1]$.

b) Bruk halveringsmetoden (eller *intervallhalveringsmetoden*) til å finne et estimat for dette nullpunktet med en feil som er mindre enn $(1/2)^4 = 0.0625$.

c) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ jevnstore delintervaller til å estimere integralet

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad .$$

Integralet kan bestemmes eksakt ved antiderivasjon. Gjør dette og bestem feilen i estimatet du fikk med trapesmetoden. (*Om du ikke finner noe estimat til å sammenlikne med, bare finn på et rimelig tall og sammenlikn med dette.*)

Oppgave 3

Bestem de generelle løsningene av disse differensiallikningene:

a) $-3y' + 2y = 2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2$

Oppgave 4

Disse matrisene er gitte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Bestem produktene AB og BA .

b) Finn alle løsninger av likninga

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

der matrisa A er gitt over.

c) Finnes det noen vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$ som gjør at likninga

$$B\vec{x} = \vec{b}$$

har løsning (er *konsistent*)? I så fall: Finn en slik $\vec{b}$ -vektor.

(Matrisa B er gitt over, $\vec{x}$ er her en vektor i $\mathbb{R}^2$. *Du trenger ikke finne selve løsninga.*)

Oppgave 5

Dette er en modell for farten til en stein i fritt fall med luftmotstand:

$$v'(t) = -10 - 0.10 v \quad .$$

Farten v , som blir gitt i meter per sekund (m/s), er en funksjon av tida t , som vi måler i sekund (s).

a) Om steinen får falle hvor lenge som helst, hvilken maksimalfart vil den nærme seg i følge denne modellen?

Vi tenker oss nå at steinen blir slengt oppover fra bakkenivå ved tida $t = 0$ med startfarten $v_0 = 20$.

b) Vis at dette, sammen med differensiallikninga over, gir at

$$v(t) = 120e^{-0.1t} - 100 \quad .$$

c) Når er steinen på sitt høyeste? Hvor høyt over bakken er den da?

Oppgave 6

a) Finn matrisa X som oppfyller likninga

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

b) En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ har standardmatrisa

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix} .$$

Hva blir transformasjonen, $T(\vec{u})$, av vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Og hvilke(n) vektor(er) $\vec{x}$ blir transformert til $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Oppgave 7

Finn alle komplekse løsninger av disse likningene:

a) $z^2 + 6z + 10 = 0$

b) $z^3 = 3 + 3i$.

Oppgave 8

Dette noko mangelfullt kommenterte skriptet kan kjøres i MATLAB:

```
1 % Start og slutt
2 x0=0;
3 xF=10;
4 y0=1;
5
6 % Oppdeling
7 N=500;
8 h=(xF-x0)/N;
9
10 % Lager vektorer
11 x=x0:h:xF;
12 y(1)=y0;
13 for i=1:N
14     y(i+1)=y(i)+( x(i) - sqrt(y(i)) )*h;
15 end
16
17 % Plotter
18 plot(x,y)
```

Skriptet kan brukes til å finne ei numerisk tilnærma løsning av et konkret problem. Hvilket? Og hva heter metoden som er implementert her?