Eksamen i matematikk 1000, august 2016.

Oppgåve 1

a) $AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ -2\cdot 2 + 1\cdot 3 & -2\cdot(-1) + 1\cdot(-1) & -2\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

B har 3 søyler, C har 2 rekker.
Difor er ikkje produktet BC definert.

$CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 - 0 + 2 & 0 - 3 - 6 & -2 - 1 - 3 \\ 6 - 0 + 6 & 0 - 3 - 18 & -3 - 1 - 9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & -9 & -6 \\ 12 & -21 & -13 \end{pmatrix}}$$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ \\ \end{matrix} =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$\det B = 0 \Leftrightarrow$ <u>B har inga inversmatrise</u>

c) Dersom A er invertibel, kan vi løyse likninga slik:

$$A X = C$$
$$A^{-1} A X = A^{-1} C$$
$$I X = A^{-1} C$$
$$X = A^{-1} C$$

A <u>er</u> invertibel!

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-(-2)\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$\underline{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

d) Inga løysing! Leiande tal i søyla lengst til høgre i totalmatrisa redusert til trappeform.

Totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a-2 & 2 \\ a+2 & -(a+2) & 0 & 3a+6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(a+2) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & -(a-2)(a+2) & a+2 \end{pmatrix}$$

Må ha: $-(a-2)(a+2)=0$ og $a+2 \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $a = \pm 2$ og $a \neq -2$

$\Leftrightarrow$ $\underline{a=2}$

Oppgåve 2

a) Hvis folketalet F ikkje endrar seg med tida t, er $F'(t)=0$. Det gir:

$$0 = 0.3 - 0.06F$$

$$F = \frac{0.3}{0.06} = 5$$

Folketalet vil stabilisere seg på 5 millionar.

b) Gitt: $F(0) = 12$

Differensiallikninga er lineær med konstante koeffisentar.

$$F' + 0.06F = 0.3$$

Homogen likning:

$$F_h' + 0.06F_h = 0$$

- Går ut frå at $F_h = e^{rt}$ er ei løysing for passe r:

$$F_h' = re^{rt}$$

$$re^{rt} + 0.06e^{rt} = 0$$

$$r = -0.06$$

Generell løysing for homogen likning:

$$F_h = Ae^{-0.06t}$$

- Går ut frå at vi kan finne ei partikulær løysing som er ein konstant: $F_p = a$, $F_p' = 0$

Set inn:

$$0 + 0.06a = 0.3$$

$$a = 5 \quad , \quad F_p = 5$$

Totalt: $F(t) = F_h + F_p = Ae^{-0.06t} + 5$

Startkrav: $F(0) = 12$

$$A e^{-0.06 \cdot 0} + 5 = 12$$

$$A = 7$$

Løysing: $\underline{F(t) = 7 e^{-0.06t} + 5}$

Problemet kan også løysast med integrerande faktor, $e^{0.06t}$:

$$e^{0.06t} (F' + 0.06F) = e^{0.06t}\, 0.3$$

$$(e^{0.06t} F)' = 0.3\, e^{0.06t}$$

$$e^{0.06t} F = \int 0.3\, e^{0.06t}\, dt = \frac{0.3}{0.06} e^{0.06t} + C$$

$$F = e^{-0.06t} (5 e^{0.06t} + C) =$$

$$C e^{-0.06t} + 5$$

Oppgåve 3

a) $f'(x) = 3 \cdot 2x + 2\cos(2x) \cdot (\cos(2x))' =$

$6x + 2\cos(2x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot (2x)' =$

$6x - 2\cos(2x)\sin(2x) \cdot 2 =$

$\underline{6x - 4\cos(2x)\sin(2x)}$

$(= 6x - 2\sin(4x))$

b) Delvis integrasjon:

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

Med $u = x^2$ og $v' = e^x$:

$u' = 2x$, $v = e^x$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx =$$

$$x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Ny delvis integrasjon på $\int x e^x dx$:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C'$$

Set inn:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x + C') =$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C =$$

$$\underline{e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

Kontroll:

$$\frac{d}{dx} \left(e^x (x^2 - 2x + 2) + C \right) =$$

$$e^x (2x - 2 + 0) + e^x (x^2 - 2x + 2) + 0 =$$

$$e^x (2x - 2 + x^2 - 2x + 2) = \underline{x^2 e^x}$$

c) Set inn $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

Venstre side:

$$2 \cdot 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2$$

Venstresida er lik høgresida; likninga er oppfyld.

Likning for linje med stigningstal a gjennom punktet (x_0, y_0):

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

For tangenten er stigningstalet a lik den deriverte.

Implisitt derivasjon:

$$\frac{d}{dx}(2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 2y) = \frac{d}{dx} 2$$

$$4x + 2y\frac{dy}{dx} - 2(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}) - 4 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x - 2y - 4 + (2y - 2x + 2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - y - 2 + (y - x + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

Set inn x_0, y_0:

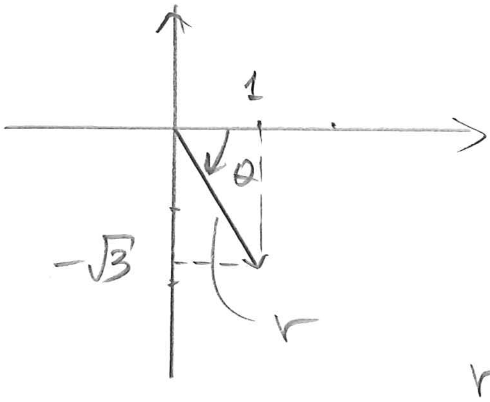
$$2 \cdot 1 - 2 - 2 + (2 - 1 + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2 + 2\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

Likning for tangent:

$$y - 2 = 1(x - 1), \quad \underline{y = x + 1}$$

d) I det komplekse planet



$$1-\sqrt{3}\,i = re^{i\theta}$$

der $r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$

og $\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{4} = 2$$

Sidan θ ligg i 4. kvadrant, får vi $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

(Kan også velge $\theta = \frac{5\pi}{3}$)

Altså:

$$1-\sqrt{3}\,i = \underline{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} \quad \left(= 2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)$$

- Kan legge eit heiltal ganger 2π til θ og få tilbake det same talet; $1-\sqrt{3}\,i = 2e^{i(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi)}$, $n\in\mathbb{Z}$

Dette brukar vi til å finne alle dei tre løysingane av likninga:

$$z^3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi)}$$

$$z = \left(2e^{i(-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi)}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}n\pi)}$$

$n=0$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{9}} \quad \left(= \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{9}}\right)$$

$n=1$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{9}}$$

$n=2$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\cdot 2\pi\right)} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{9}} = \sqrt[3]{2}\, e^{-i\frac{7\pi}{9}}$$

Oppgåve 4

I for-løkka ser vi at R er summen $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$ der $f(x) = x^3 - x^2$, gitt i linje 3, $N = 100$ (linje 6) og $x = a + (i-1)\Delta x$. Med $a = 1$, $b = 3$ (linje 1 og 2) blir $\Delta x = \frac{3-1}{100} = \frac{1}{50}$ (linje 7).

Dette er ein Riemann-sum for $f(x)$ med ein venstre-seleksjon på ein regulær partisjon av intervallet $[a, b] = [1, 3]$.

Når vi auker N, vil R nærme seg integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - x^2)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{3^4-1}{4} - \frac{3^3-1}{3} = \underline{\underline{\frac{34}{3}}}$$

Oppgåve 5

a) – Løyser først den homogene likninga $y_h'' - 2y_h' + 5y_h = 0$ ved å gå ut frå at $y_h = e^{rx}$.

$y_h' = r e^{rx}$, $y_h'' = r^2 e^{rx}$

$$r^2 e^{rx} - 2r e^{rx} + 5 e^{rx} = 0$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = 1 \pm 2i$$

Generell løysing: $y_h = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$

– Går ut frå at vi kan finne konstant partikulær løysing av den inhomogene likninga: $y_p = a$

$y_p' = y_p'' = 0$

$0-2\cdot 0+5a=10, \quad a=2, \quad y_p=2$

Generell løysing:

$$y=y_h+y_p=\underline{e^{x}\left(A\cos(2x)+B\sin(2x)\right)+2}.$$

b) Likninga er både lineær og separabel. Her vel vi å løyse ho som ei separabel likning:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{2x-1}\;y$$

$$\frac{dy}{y}=\sqrt{2x-1}\;dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy=\int\sqrt{2x-1}\,dx$$

Variabelbyte: $u=2x-1, \quad dx=\frac{1}{2}du$

$$\ln|y|=\int u^{1/2}\,\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{1/2+1}+C'$$

$$=\frac{1}{3}u^{3/2}+C'=\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C'$$

$$y=\pm e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C''}=\pm e^{C'}e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}}$$

$$\underline{y=C\,e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}}} \qquad (C=\pm e^{C''})$$

Oppgåve 6

$$p(x) = 2 + \frac{x}{1+e^{x-6}}$$

a) $p(x)$ er kontinuerleg og deriverbar. Maksimalpunktet vil anten vere eit randpunkt eller eit punkt der $p'(x)$ endrar forteiken.

$$p'(x) = 0 + \frac{1(1+e^{x-6}) - x(0+e^{x-6}\cdot 1)}{(1+e^{x-6})^2} =$$

$$\frac{1+e^{x-6} - xe^{x-6}}{(1+e^{x-6})^2} = \frac{1+(1-x)e^{x-6}}{(1+e^{x-6})^2}$$

$p'(x)$ er kontinuerleg. Difor må $p'(x)$ vere null der han endrar forteiken.

$$p'(x) = 0 \iff \frac{1+(1-x)e^{x-6}}{(1+e^{x-6})^2} = 0 \iff$$

$$1 + (1-x)e^{x-6} = 0$$

For randpunkta har vi at

$$p'(0) = \frac{1-e^{-6}}{(1+e^{-6})^2} > 0 \quad \text{og}$$

-12

$$p'(10) = \frac{1-9e^4}{(1+e^4)^2} < 0$$

Difor er begge randpunkta lokale minima. Maksimalpunktet <u>må</u> difor vere eit punkt som oppfyller

$$\underline{1 + (1-x)e^{x-6} = 0}$$

b) Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Her: $f(x) = 1 + (1-x)e^{x-6}$

$$f'(x) = 0 + (-1)e^{x-6} + (1-x)e^{x-6} \cdot 1 =$$

$$-xe^{x-6}$$

Vi får:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1+(1-x_n)e^{x_n-6}}{x_n e^{x_n-6}}$$

Med $x_0 = 5$ får vi

$$x_1 = 5 + \frac{1+(1-5)e^{5-6}}{5 \cdot e^{5-6}} = 4.7437$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1+(1-x_1)e^{x_1-6}}{x_1 \cdot e^{x_1-6}} = 4.6949$$

Altså: $\underline{x \approx 4.69}$

c) Formel for volum ved å dreie om x-aksen gir

$$V = \pi \int_0^h (p(x))^2 \, dx$$

Både V og h er funksjoner av tida, V(t), h(t).

Kjerneregelen:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Fundamentalteoremet:

$$\frac{d}{dh} \int_0^h (p(x))^2 dx = (p(h))^2$$

Altså:

$$\frac{dV}{dt} = \pi \, (p(h))^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\underline{V'(t) = \pi \, (p(h))^2 \cdot h'(t)}$$

Gitt: $V'(t) = 0.1 \, \frac{dm^3}{s}$ (heile tida)

Med $h = 0$:

$$V'(t) = \pi \, (p(0))^2 \, h'(t)$$

$$0.1 = \pi \cdot 2^2 \, h'(t)$$

$$h'(t) = \frac{0.1}{4\pi} \approx 0.007958$$

Vatnet stig med farten 0.007958 dm/s $\approx$
<u>0.796 mm/s</u> når $h=0$

Med $h=6$: $p(h) = 2 + \dfrac{6}{1+e^{6-6}} = 5$

$V' = \pi\,(p(6))^2\, h'(t)$

$0.1 = \pi \cdot 5^2\, h'(t)$

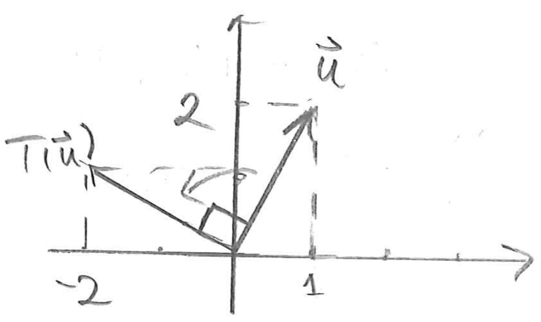
$h'(t) = \dfrac{0.1}{25\pi} = 0.001273$

Vatnet stig med farten 0.001273 dm/s $\approx$
<u>0.127 mm/s</u> når høgda er 6 dm.

Vi ser at vatnet stig mykje saktare når vasen er brei.

Oppgåve 7

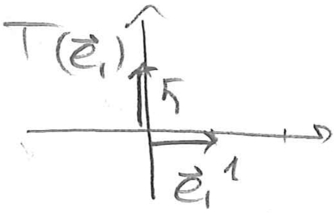
a)
T: Rotasjon $\frac{\pi}{2}$ mot klokka i $\mathbb{R}^2$

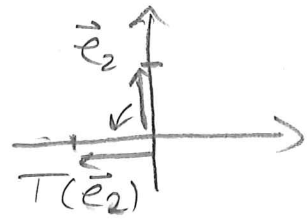


Ser:
$\underline{T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$u(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ der $A = (T(\vec{e}_1) | T(\vec{e}_2))$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$





Ser: $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ og $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

slik at $A = \underline{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}}$.

For U:

$$U(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x_1 + x_2\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$$

Standardmatrisa er $\underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}$

b) Med $V(\vec{x}) = B\vec{x}$ skal vi ha at

$$B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \text{ og } B\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Dette kan skrivast som ei matriselikning:

$$B\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -2 & 0\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}}_{M}$$

Dersom D er invertibel, er

$B = M D^{-1}$ (jmf. Oppg. 1 c)). Hvis ikkje kan ikkje B bestemmast eintydig.

Vi undersøker:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ \leftarrow & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ 2 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

D er ikkje invertibel; standardmatrisa til transformasjonen V kan <u>ikkje</u> bestemmast ut frå dei gitte opplysingane.

Oppgåve 8

a) Eulers metode:

$y(x_n) \approx y_n$ der

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) h, \quad x_n = x_0 + nh$$

for startverdiproblemet $y' = F(x, y)$

med $y(x_0) = y_0$.

Her: $h = 0.5$, $x_0 = 0$, $y_0 = -3$ og $F(x,y) = x + \frac{y}{2}$

$$y_1 = y_0 + \left(x_0 + \frac{y_0}{2}\right)h = -3 + \left(0 + \frac{-3}{2}\right)\cdot 0.5 = -3.75$$

$$y_2 = y_1 + \left(x_1 + \frac{y_1}{2}\right)h = -3.75 + \left(0.5 - \frac{3.75}{2}\right)\cdot 0.5$$
$$= -4.438$$

$$y_3 = y_2 + \left(x_2 + \frac{y_2}{2}\right)h = \ldots = -5.047$$

$$y_4 = y_3 + \left(x_3 + \frac{y_3}{2}\right)h = \ldots = -5.559$$

I tabellform:

n	x_n	y_n
0	0	-3
1	0.5	-3.75
2	1	-4.44
3	1.5	-5.05
4	2	-5.56

b) Differensiallikninga er lineær og kan løysast eksakt – på same måte som i oppg. 5 b).

Med integrerande faktor får vi

$$e^{-x/2}\left(y' - \tfrac{1}{2}y\right) = e^{-x/2}x$$

$$\left(e^{-x/2}y\right)' = e^{-x/2}x$$

$$e^{-x/2}y = \int e^{-x/2}x\,dx =$$

Delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = e^{-x/2}$:

$$e^{-x/2}y = x\cdot(-2)e^{-x/2} - \int 1\cdot(-2)e^{-x/2}\,dx =$$

$$-2xe^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}\,dx =$$

$$-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + C$$

$$y = e^{x/2}\left(-2xe^{-x/2} - 4e^{x/2} + C\right) =$$

$$= -2x - 4 + Ce^{x/2}$$

Startkrav: $y(0) = 4$

$$0 - 4 + Ce^{0} = -4, \quad C = 0$$

$$y = -2x - 4$$

– Løysinga er ein <u>lineær</u> funksjon; $y' = 1$ for alle x.

Sidan Eulers metode estimerar

y_{n+1} ved å gå ut frå at y er lineær på intervallet $[x_n, x_{n+1}]$, vil metoden gi eksakt rett svar i dette tilfellet.

Vi illustrerar ved å gjenta deloppgåve a) med $y(0)=-4$

$y_1 = y_0 + (x_0 + \frac{y_0}{2})h = -4 + (0 - \frac{4}{2})\cdot 0.5 = -5$

$y(x_1) = -2x_1 - 4 = -2\cdot 0.5 - 4 = -5$

$y_2 = y_1 + (x_1 + \frac{y_1}{2})h = -5 + (0.5 + \frac{-5}{2})\cdot 0.5 = -6$

$y(x_2) = -2\cdot 1 - 4 = -6$

etc.