Prøve i	Matte 1000 EMFE DAFE ELFE BYFE 1000
Dato:	22. mai 2015
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

regn ut $A + B$ og AB.

b) Bestem inversmatrisa til A.

For en gitt vektor $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^3$, finnes det akkurat én vektor $\vec{x}$ som løser likninga $A\vec{x} = \vec{b}$?

c) Er følgende søylevektorer lineært uavhengige? Hvis ikke, uttrykk en av dem som en lineærkombinasjon av de andre to vektorene.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

d) En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ har følgende egenskaper:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem standardmatrisa til T.

Oppgave 2

Evaluer følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 3x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = \ln(x+1) - e^{-x/2} .$$

a) Forklar hvorfor f har ett – og bare ett – nullpunkt på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk Newtons metode til å finne en tilnærma verdi for dette nullpunktet. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

Oppgave 4

a) Deriver følgende to funksjonsuttrykk med hensyn til variabelen x. Parameteren a er positiv og uavhengig av x.

$$\cos^3(2x-4) \qquad \text{og} \qquad \frac{a}{x} + \frac{x}{a} + a^x + x^a$$

b) Løs likninga

$$i + (1 + \sqrt{3}i)z = 1$$

for z, og skriv løsninga på polarform, $re^{i\theta}$.

Oppgave 5

a) Vis at en funksjon $y(x)$, definert for positive verdier x, med egenskapen at tangentlinja i $(x, y(x))$ treffer y-aksen i punktet $(0, x)$, må tilfredstille differensiallikninga

$$y' - \frac{y}{x} = -1 .$$

b) Bestem alle funksjoner som har egenskapen beskrevet i a) og som oppfyller betingelsen $y(1) = 3$.

Oppgave 6

Skriptene i denne oppgava kan kjøres i MATLAB eller Octave.

a) Finn ut hva følgende skript regner ut. Finn resultatet av utregningen ved å benytte andre metoder enn å kjøre skriptet.

```
G=1;
k=3;
S=0;
for n=1:10
   S=S+G;
   G=G*k;
end

%Skriver ut resultatet
S
```

b) Hvilket problem forsøker dette ukommenterte skriptet å estimere løsninga av?

```
x0=1;
y0=3;
xF=7;
N=500;

h=(xF-x0)/N;
xVektor=x0:h:xF;
yVektor(1)=y0;

for i=1:N
  x=xVektor(i);
  y=yVektor(i);
  yD=-1+y/x;
  yVektor(i+1)=y+yD*h;
end

plot(xVektor,yVektor)
```

Oppgave 7

Dette er en modell for harmonisk svingning med friksjon proporsjonal med farten:

$$my'' + ly' + ky = 0 \ ,$$

hvor m er masse, l er friksjonskoeffisient og k er "stivheten" til systemet. Alle tre parametrene er positive.

a) Hvis friksjonen l er tilstrekkelig stor, vil systemet bremses opp så kraftig at det klarer bare én eller ingen svingning frem og tilbake (overkritisk eller kritisk dempning). Bestem en størrelse L slik at dette skjer presis når $l \geq L$.

b) For $l < L$ vil systemet svinge som ein trigonometrisk funksjon multiplisert med en avtakende eksponentialfunksjon. Hva er perioden til denne trigonometriske funksjonen?

c) Vi antar nå at $m = 2$, $l = 1$ og $k = 3$ og at systemet utsettes for ei ekstern kraft gitt ved $\sin(t)$. Systemet er da beskrevet ved denne differensiallikninga:

$$2y'' + y' + 3y = \sin(t) \ .$$

Beskriv alle mulige løsninger av denne differensiallikningen.

Oppgave 8

a) Om en funksjon $g(x)$ er det gitt at $g(0.5) = -0.3466$ og at $g(1.5) = 0.6082$. Bruk dette til å estimere $g'(1)$.

Gitt at funksjonen det er snakk om er

$$g(x) = x \ln x \ ,$$

finn feilen i estimatet.

b) For samme funksjon $g(x)$ som i a), bestem Taylor-polynomet av tredje orden omkring $x = 1$.

c) Anta at en funksjon $f(x)$ er minst fire ganger kontinuerlig deriverbar i et åpent intervall som inneholder $x = a$.

Vis at

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = -f^{(2)}(a)/2$$

og at

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f'(a) - \frac{f(a+h/2) - f(a-h/2)}{h} \right) = 0 \ .$$

Bestem grensa

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left(f'(a) - \frac{f(a+h/2) - f(a-h/2)}{h} \right) \ .$$