| | |
|---|---|
| Prøve i | Matte 1000 EMFE DAFE ELFE BYFE 1000 |
| Dato: | august 2015 |
| Hjelpemiddel: | Kalkulator og formelark |

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Løsningsforslag

**Oppgave 1**

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

regn ut $-3B$, $A+B$, $BA$ og $AB$ hvis de eksisterer.

**LF:** Summen $A+B$ er ikke definert fordi matrisene har forskjellige dimensjoner. Produktet $BA$ er ikke definert fordi antall søyler i $B$ er forskjellig fra antall rader i $A$. Skalarmultiplikasjonen er

$$-3B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -9 \\ 6 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

Produktet er

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -8 & 6 \\ 0 & 5.5 \end{bmatrix}$$

b) En lineær transformasjon $T$ fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ er gitt ved først å rotere $\pi/2$ radian i positiv retning (mot klokken) og deretter speile om $x$-aksen. Bestem standardmatrisa til $T$.

**LF:** Rotasjonen sender $e_1$ til $e_2$ og $e_2$ til $-e_1$. Etter speilingen om $x$-aksen sendes derfor $e_1$ til $-e_2$ og $e_2$ til $-e_1$. Standardmatrisen er derfor gitt ved

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) En lineær transformasjon $T$ har standardmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem alle vektorene som transformasjonen sender til vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

**LF:** Vi søker vektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ slik at

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrisen $M$ er inverterbar og det finnes derfor bare en slik vektor. Den er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Dette kunne vi lett ha sett direkte også. Likningene er $x - y = 0$, som gir $x = y$, og $x + 4y = 2$. Samlet gir dem at løsningen er $x = y = 2/5$.

**Oppgave 2**

En funksjon definert for alle reelle tall er gitt ved delt forskrift som følger

$$f(x) = \begin{cases} bx + 1 & x \leq 1 \\ ax^2 & 1 < x \end{cases}$$

Bestem parametrene $a$ og $b$ slik at funksjonen $f$ er deriverbar for alle $x$.

**LF:** Siden funksjonen skal være deriverbar i alle punkt må den også være kontinuerlig i alle punkt (siden deriverbar impliserer kontinuerlig). Funksjonen er kontinuerlig og deriverbar i alle punkt vekk fra $x = 1$. Funksjonen er kontinuerlig i $x = 1$ presis når $b + 1 = a$. Anta dette er oppfylt. Da er

$$f'(x) = \begin{cases} b & x < 1 \\ 2ax & 1 < x \end{cases}$$

og den derivert i $x = 1$ fra venstre er lik $b$ og den derivert i $x = 1$ fra høyre er lik $2a$. Funksjonen er deriverbar i $x = 1$ presis når disse er like $b = 2a$. Disse to likningene har løsningen $a = -1$ og $b = -2$. Paramtrene må derfor være $a = -1$ og $b = -2$ for at $f$ skal være deriverbar for alle $x$.

**Oppgave 3**

a) Løs likningen

$$i + (1 + i)z = 0$$

for $z$, og skriv løsninga på polarform, $re^{i\theta}$.

**LF:** Dette er en lineær likning i $z$. Løsningen er $z = -i/(1 + i)$. På polar form er løsningen

$$z = \frac{e^{3\pi i/2}}{\sqrt{2}e^{1\pi i/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5\pi i/4}$$

b) Beskriv alle løsningene til følgende likning både på kartesisk og polar form

$$z^4 = -1.$$

**LF:** En løsning til likningen $z^4 = -1 = e^{\pi i}$ er $z = e^{\pi i/4}$. De andre løsningene får vi ved å gange denne løsningen med fire-røttene til enhetselementet $1, e^{\pi i/2}, e^{\pi i}$ and $e^{3\pi i/2}$. Løsningene er

$$e^{\pi i/4} \quad e^{3\pi i/4} \quad e^{5\pi i/4} \quad e^{7\pi i/4}.$$

**Oppgave 4**

Inntekstrømmen (inntekt per tidsenhet) i norske kroner (NOK) til et stort norsk selskap ved ulike tidspunkt er gitt i tabellen

| Tidspunkt | 12:00 | 15:00 | 18:00 | 21:00 | 24:00 |
|---|---|---|---|---|---|
| Inntektsstrøm (NOK/time) | 2000 | 2500 | 3500 | 2000 | 500 |

a) Regn ut tilnærmede verdier for endringene i inntektsstrømmen klokken 15:00 og 19:30.
**LF:** Klokka 15:

$$\frac{3500 - 2000}{6} = 250 \text{ NOK/time}$$

Klokka 19:30:

$$\frac{2000 - 3500}{3} = -500 \text{ NOK/time}$$

b) Bruk Trapesmetoden til å regne ut en tilnærmet verdi for den totale inntekten til selskapet fra kl 12:00 til kl 24:00.
**LF:** Bruker formelen fra formelarket

$$\text{Total inntekt} = \frac{24-12}{4}(2000/2 + 2500 + 3500 + 2000 + 500/2) = 27750 \text{ NOK}$$

**Oppgave 5**

a) Forklar hvorfor likningen

$$2xe^x + x = 10$$

har akkurat en løsning.

**LF:** En løsning til likningen er det samme som et nullpunkt til funksjonen $2xe^x + x - 10$. Den deriverte til denne funksjonen er lik $2xe^x + 2e^x + 1$. Denne funksjonen er positiv for alle $x$. Derfor er funksjonen $2xe^x + x - 10$ strengt voksende. Funksjonen har derfor ikke mer enn ett nullpunkt. Funksjonen er kontinuerlig for alle $x$ (siden den er deriverbar). Funksjonsverdien til $2xe^x + x - 10$ i $x = 1$ er lik $2e + 1 - 10$ som er negativ. Funksjonsverdien i $x = 2$ er lik $4e^2 + 2 - 10$ som er positiv. Fra skjæringssetningen har funksjonen derfor et nullpunkt. Vi konkluderer med at likningen har akkurat ett nullpunkt.

b) Estimer løsningen til likningen i del a) ved å benytte Newtons metode. Start med verdien $x_0 = 1.5$ og utfør to iterasjoner.

**LF:** Vi benytter funksjonen $2xe^x + x - 10$ og får følgende iterative formel

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2xe^x + x - 10}{2xe^x + 2e^x + 1}.$$

Vi starter med $x_0 = 1.5$ og får

$$x_1 = 1.2887\ldots \qquad x_2 = 1.2523\ldots\ .$$

( Til orientering så er $x_3 = 1.251444$ og $x_4 = 1.251443$.)

**Oppgave 6**

En kjegle plassert med spissen ned fylles med vann. Det helles i vann med en konstant rate på 1 liter per sekund. Anta kjeglen (innvendig) har høyde 1 meter og diameter 1.5 meter. Hvor fort øker vannstanden i kjeglen når vannet er kommet 60 cm opp i kjeglen? Oppgi svaret med enheten cm per sekund.

**LF:** La høyden i kjeglen (fra spissen) være $h$ og radius i tverrsnittet ved høyde $h$ være $r$. Da har vi at $h/r = 1/0.75 = 4/3$. (Diameteren til kjeglen er 1.5 meter så radien er halvparten, 0.75 meter.) Endringsraten til vannstanden er den deriverte $dh/dt$. Vi kjenner endringsraten til volumet $V$ til vannet. Den er $dV/dt = 1dm^3/s$. Relasjonen mellom disse to endringsratene er gitt ved kjerneregelen

$$\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

Den deriverte av volumet med hensyn til høyden er tverrsnittarealet til kjeglen ved høyden $h$. Det er $\pi r^2(h) = \pi(3h/4)^2$. Vi får derfor

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}/(\pi(3h/4)^2).$$

Når høyden er 60 cm (= 6 dm) gir dette endringsraten

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1dm^3/s}{\pi(3\cdot 6dm/4)^2} = \frac{2^2}{\pi\cdot 9^2}dm/s = 0.015719\ldots dm/s \simeq 0.157cm/s.$$

**Oppgave 7**

Regn ut følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^6\,\mathrm{d}x$

**LF:** Vi benytter substitusjonen $u = 1+x^2$. Da er $u' = 2x$. Det bestemte integralet er lik

$$\int_{u(0)}^{u(1)} (1/2)(u)^6\,\mathrm{d}u = (1/2)\int_1^2 (u)^6\,\mathrm{d}u = \left.\frac{u^7}{14}\right|_1^2 = \frac{2^7-1}{14} = \frac{127}{14} = 9.07$$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

**LF:** Vi benytter først polynomdivisjon og får

$$\frac{x^2}{x^2+4} = 1 + \frac{-4}{x^2+4} = 1 - \frac{1}{1+(x/2)^2}.$$

Vi benytter substitusjonen $u = x/2$.

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1 - \frac{1}{1+(x/2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+(u)^2}\,2\mathrm{d}u$$

$$= 2 - 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2 - 2(\pi/4) = 2 - \pi/2 \quad (= 0.4292\ldots).$$

**Oppgave 8**
Beregn volumet til legemene som fremkommer ved å rotere regionen mellom grafen til $\cos(x)$ og $\sin(x)$ fra $x = 0$ til $x = \pi/4$ om

a) $x$-aksen

**LF:** Vi benytter diskmetoden. Vi tar differansen av legemet definert av kurven til cos og legemet definert av kurven til sin. Volumet er gitt ved

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) - \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\pi \sin(2x)/2\big|_0^{\pi/4} = \pi(1/2 - 0) = \pi/2$$

b) $y$-aksen

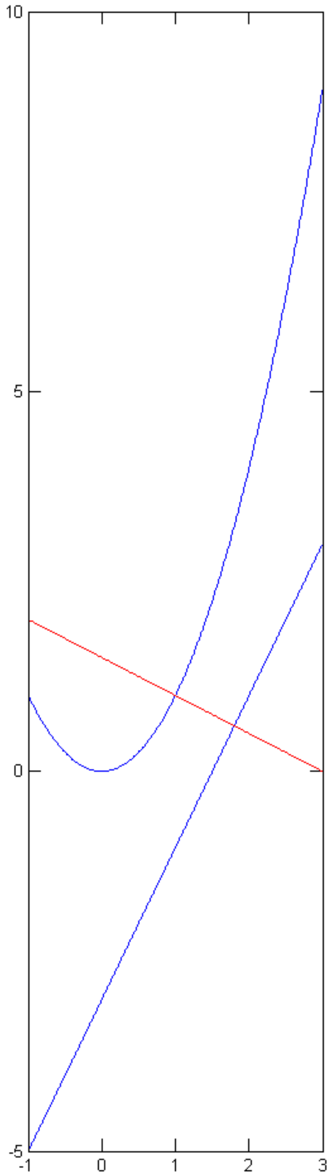
**LF:** Her er det mest naturlig å benytte sylinderskallmetoden. Volumet er

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))x\,\mathrm{d}x =$$

$$2\pi\left((\cos(x) + \sin(x))x + \cos(x) - \sin(x)\right)$$

$$\big|_0^{\pi/4} = \pi(\pi/\sqrt{2} - 2) = 0.69567\ldots$$

**Oppgave 9**
Finn punktet på grafen til funksjonen $y = x^2$ som har kortest avstand til linjen gitt som grafen til $y = 2x - 3$.
Tegn gjerne en figur og argumenter geometrisk.
Vis at den korteste avstanden mellom de to grafene er $2/\sqrt{5}$.
**LF:** Figur 1 viser en illustrasjon av de to kurvene (blå kurver). Vi observerer




Figur 1: Plot til oppgave 9.

at når avstanden mellom kurvene er kortest er de parallelle. For å finne

$x-$verdien hvor de to kurvene har samme stigningstall.

$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= (2x-3)' \\
2x &= 2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

For å måle den korteste avstanden introduserer vi hjelpelinjen som er vertikal på linjen $y = 2x - 3$ (se rød kurve på figur 1). Den vertikale linjen må ha stigningstall $-1/2$ og videre må den gå gjennom punktet på parabelen hvor avstanden er kortest. Dermed kan vi finne skjæringspunktet til hjelpelinja med $y-$aksen

$$
\begin{aligned}
1^2 &= -1/2 \cdot 1 + b \\
b &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Hjelpelinen er altså $y = -1/2x{+}3/2$. Vi finner videre kooridnatene når denne linjen skjærer linjen $y = 2x - 3$

$$
\begin{aligned}
-1/2x + 3/2 &= 2x - 3 \\
x &= 9/5 \\
y &= 2 \cdot (9/5) - 3 = 3/5
\end{aligned}
$$

Vi kan videre regne korteste avstand som avstanden mellom koordinatene hvor den rød kurven skjærer de to blå kurvene, altså $(1, 1)$ og $(9/5, 3/5)$.

$$
\sqrt{\left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}
$$

**Oppgave 10**

Skriptene i denne oppgava kan kjøres i MATLAB.

a) Forklar i detalj hva følgende skript gjør. (Gjerne linje for linje.) Finn resultatet av å kjøre skriptet.

```
1 A=0;
2 while  A  < 100
3    A=A+3;
4 end
5 A
```

**LF:** I skriptet økes verdien til variabelen A med tre i hver iterasjon av while-løkka. Når verdien til A ikke lenger er under 100 så hopper vi ut av while-loøkka. Verdien til A blir altså 3, 6, 9, ..., 99 når skriptet kjærer. I neste iterasjon blir A lik 102 og neste gang vi kommer til linje 2 er ikke lenger kriteriet i while-løkka tilfredstilt og vi hopper ut. A vil altså ha verdien 102 når skriptet er kjørt ferdig.

b) Forklar i detalj hva følgende skript gjør. (Gjerne linje for linje.)

```
f=@(x) sqrt( 1 + (x)^3 ); % definerer en funksjon f
a=0;
b=2;
n = 10;
d=(b-a)/(2*n);
S=0;
for i=1:n
   S=S + d*(f(a + (i-1)*d) + f(a + i*d));
end
S
```

**LF:** Dette er en implementasjon av Trapesmetoden med $n = 10$ delintervaller. (Svaret som skrives ut er 6.4960.)

**Oppgave 11**

Finn alle løsningene til differensiallikningene og initialverdiproblemene

$$a) \quad y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

**LF:** Karakteristisk ligning

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = -1$$

Vi har en dobbelrot for $\lambda = -1$ og den generelle løsningen blir

$$y(x) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

Vi setter inn initialverdiene

$$y'(x) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

$$y(0) = c_1 = 0$$
$$y'(0) = -c_1 + c_2 = 2$$

som gir $c_1 = 0$ og $c_2 = 2$. Den unike løsningen blir

$$y(x) = 2te^{-t}$$

$$b) \quad y'' - 4y' = e^{2x} + 1$$

**LF:** Vi finner først den homogene løsningen

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

som gir $\lambda = 0$ og $\lambda = 4$. Den homogene løsningen blir

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{4x}$$

Vi foreslår videre følgende form på partikulær løsningen

$$y_p(x) = Ae^{2x} + Bx + C$$

Merk at vi ikke bare inkluderer en konstant, men en linje $Bx + C$ da en konstant inngår i den homogene løsningen.

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2Ae^{2x} + B \\ y''(x) &= 4Ae^{2x} \end{aligned}$$

Setter vi inn i differensialligningen får vi følgende ligning i A og B

$$4Ae^{2x} - 4(2Ae^{2x} + B) = e^{2x} + 1$$

som gir $A = B = -1/4$. Den generelle løsningen blir

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}x$$