

Innlevering i DAFE/ELFE 1000
Oppgavesett 4
Innleveringsfrist: 11. april klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2-s & 1 \\ 0 & s & 2 \\ 2 & 4 & s+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-s & 1 \\ 0 & s & 2 \\ 0 & 2s & s+2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} s & 2 \\ 2s & s+2 \end{vmatrix} = s(s+2) - 2s \cdot 2 = s^2 - 2s = \underline{s(s-2)} \quad .$$

Her har vi først lagt 2 ganger rekke 1 til rekke 3 og så utført en kofaktor-ekspansjon langs søyle 1.

For at A skal være invertibel, må determinanten være ulik 0. Altså er A invertibel for alle s utenom 0 og 2. ($s \notin \{0, 2\}$.)

b) Vi ser at koeffisientmatrisa til likningssystemet er A ; likningssystemet kan skrives som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\mathbf{b} = [s, 1, 6]^T$. Vi veit at denne er invertibel for alle s ulik 0 og 2. Løsninga kan da skrives som $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Liningssystemet har entydig løsning når $s \notin \{0, 2\}$.

Vi undersøker spesielt hva som skjer når $s = 0$ og $s = 2$. For $s = 0$ får vi denne totalmatrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad .$$

Her har vi først trukket 2 ganger rekke 1 fra rekke 3, så har vi trukket rekke 2 fra rekke 3. Av den nederste rekka ser vi at likningssystemet er inkonsistent når $s = 0$.

For $s = 2$ blir totalmatrisa til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Her har vi igjen trukket 2 ganger rekke 1 fra rekke 3, så har vi trukket 2 ganger rekke 2 fra rekke 3. Vi ser at matrisa på trappeform ikke har noe ledende tall i søyle 3. Videre inneholder ikke likningssystemet noen selvmotigelser. x_3 vil derfor være ubestemt og systemet har uendelig mange løsninger for $s = 2$.

Oppgave 2

- a) I hver forgrening må summen av strømmen inn og strømmen ut være like; hvis ikke ville ladning bli samla opp eller bare forsvinne, noe som ikke stemmer overens med at strømmene skal være konstante. Dette gjør oss i stand til å sette opp følgende likninger:

$$\begin{aligned}I_1 &= I_2 + I_3 && \text{For forgeininga nede til venstre} \\I_2 + I_4 &= I_5 && \text{For den øverste forgeininga} \\I_3 + I_5 &= I_6 && \text{For forgeininga nede til høyre}\end{aligned}$$

Om vi lar ukjente størrelser stå på venstre side, og setter inn kjente størrelser på høyre side¹, får vi

$$\begin{aligned}I_2 + I_3 &= I_1 \\-I_2 + I_5 &= I_4 \\I_3 + I_5 &= I_6 \quad ,\end{aligned}$$

eller som matriselikning:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi setter opp totalmatrisa til systemet og rekkereduserer denne til trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & I_1 \\ -1 & 0 & 1 & I_4 \\ 0 & 1 & 1 & I_6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & I_1 \\ 0 & 1 & 1 & I_1 + I_4 \\ 0 & 1 & 1 & I_6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & I_1 \\ 0 & 1 & 1 & I_1 + I_4 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 - (I_1 + I_4) \end{bmatrix}$$

Her har vi først lagt rekke 1 til rekke 2. Så har vi trukket rekke 2 fra rekke 3.

Vi ser at vi ikke får noen ledende ener for I_5 (søyle 3). Vi vil altså ikke klare å bestemme de andre strømmene om vi måler I_1 , I_4 og I_6 . Videre ser vi at for at likningssystemet skal være konsistent, må vi ha at $I_1 + I_4 = I_6$. Dette er jo ikke så rart; om vi ser på “trekant-kretsen” i midten som en egen komponent, kan vi tenke oss at denne også er et forgreningspunkt. I så fall vil den samla strømmen inn til dette punktet være $I_1 + I_4$ og I_6 vil være strømmen ut.

Om vi i stedet hadde målt strømmene I_2 , I_3 og I_5 , ville de tre andre strømmene, I_1 , I_4 og I_6 , blitt bestemt av dette. Dette ser vi direkte av likningssystemet over. Om vi bytter høyre og venstre side over, får vi

$$\begin{aligned}I_1 &= I_2 + I_3 \\I_4 &= -I_2 + I_5 \\I_6 &= I_3 + I_5 \quad .\end{aligned}$$

¹Selv om vi ikke vet hva I_1 , I_4 og I_6 er, tenker vi oss at vi vet det; disse strømmene vil være kjente når vi har målt dem.

- b) Vi setter opp differensiallikninga med tall (men beholder ω i stedet for å sette inn 100π):

$$I' + 5I = 325 \sin(\omega t) \quad .$$

Denne likninga er lineær og av første orden. Siden vi har konstante koeffisientene på venstre side, kan den løses ved å “tippe” på ei eksponentialløsning for den tilsvarende homogene likninga og så finne ei partikulær løsning ved å anta trigonometrisk form med bølgetall ω . Men den kan også løses ved å bruke medtoden med integrerende faktor. Vi gjør det siste her.

Den integrerende faktoren er $e^{F(t)}$ der $F'(t) = 5$. Vi velger $F(t) = 5t$ og får

$$\begin{aligned} e^{5t} (I' + 5I) &= e^{5t} \cdot 325 \sin(\omega t) \\ (e^{5t} \cdot I)' &= 325 e^{5t} \sin(\omega t) \\ e^{5t} \cdot I &= 325 \int e^{5t} \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

Integralet på høyre side kan løses ved å bruke delvis intergasjon to ganger. Med $\int uv' dt = uv - \int u'v dt$ kan vi velge u og v' slik:

$$\begin{aligned} u &= \sin(\omega t) \Rightarrow u' = \omega \cos(\omega t) \\ v' &= e^{5t} \Leftarrow v = e^{5t}/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{5t} \sin(\omega t) dt &= \frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{1}{5} \int e^{5t} \omega \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{5} \int e^{5t} \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{5} \left(\frac{1}{5} e^{5t} \cos(\omega t) - \frac{1}{5} \int e^{5t} (-\omega) \sin(\omega t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{25} e^{5t} \cos(\omega t) - \frac{\omega^2}{25} \int e^{5t} \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Vi har her gjort delvis integrasjon en gang til. Vi ser at vi får tilbake det integralet vi starta med på høyre side. Dette flytter vi over på venstre side og bestemmer integralet ved å løse likninga over:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right) \int e^{5t} \sin(\omega t) dt &= \frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{25} e^{5t} \cos(\omega t) + C' \\ \int e^{5t} \sin(\omega t) dt &= \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{25}} \left(\frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{25} e^{5t} \cos(\omega t) + C' \right) = \\ &= \frac{25}{25 + \omega^2} \left(\frac{1}{5} \sin(\omega t) e^{5t} - \frac{\omega}{25} e^{5t} \cos(\omega t) + C' \right) = \\ &= \frac{1}{25 + \omega^2} (5 \sin(\omega t) e^{5t} - \omega \cos(\omega t) e^{5t} + C) \quad (C = 25C') \end{aligned}$$

Dette setter vi inn i likning 1:

$$\begin{aligned}e^{5t} \cdot I &= 325 \cdot \frac{1}{25 + \omega^2} (5 \sin(\omega t) e^{5t} - \omega \cos(\omega t) e^{5t} + C) \\I(t) &= e^{-5t} \frac{325}{25 + \omega^2} (5 \sin(\omega t) e^{5t} - \omega \cos(\omega t) e^{5t} + C) \\I(t) &= \frac{325}{\omega^2 + 25} (5 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + C e^{-5t})\end{aligned}$$

Vi kjenner igjen uttrykket fra oppgaveteksten.

Slik oppgaveteksten er formulert, kunne vi også ha løst oppgava ved å derivere uttrykket for $I(t)$, sette det inn på venstre side i differensiallikninga og vise at man da faktisk får ut det som står på høyre side i likninga.

c) Først bruker vi initialkravet til å bestemme C :

$$\begin{aligned}I(0) &= 0 \\ \frac{325}{\omega^2 + 25} (5 \sin 0 - \omega \cos 0 + C e^0) &= 0 \\ C &= \omega\end{aligned}$$

slik at

$$\frac{325}{\omega^2 + 25} (5 \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) + \omega e^{-5t})$$

For å bruke Eulers metode må vi først skrive differensiallikninga på forma $I'(t) = F(t, I)$. I vårt tilfellet får vi at

$$F(t, I) = 325 \sin(100\pi t) - 5I \quad .$$

Eulers metode kan implementeres slik:

```
1 % Implementering av Eulers metode
2 % Initialkravet er "hard-koda". Start og slutt er også fiksert
3 % i koden. Antall steg blir lest inn fra kommandolinja.
4 % y' blir gitt ved funksjonsfila DerivFunk.
5
6 % Fjerner gamle variable
7 clear all
8
9 % Bestemmer initialkravet
10 x0=0;
11 y0=0;
12
13 % Velger sluttverdi for x
14 xSlutt=0.5;
15
16 % Fikserer antall steg
```

```

17 N=input('Gi antal steg: ');
18 % Regner ut steglengda
19 h=(xSlutt-x0)/N;
20
21
22 % Lager en vektor med alle aktuelle x-verdier
23 xVektor=x0:h:xSlutt;
24
25 % Vi initierer en vektor med tilsvarende y-verdier
26 % Den første komponenten skal være gitt ved initialkravet
27 yVektor(1)=y0;
28
29 for i=1:N
30     x=xVektor(i);          % Bestemmer den aktuelle x-verdien
31     y=yVektor(i);          % Bestemmer den aktuelle y-verdien
32     yD=DerivFunk(x,y);     % y' gitt ved funksjonfil
33     yVektor(i+1)=y+yD*h;   % Beregner neste steg ved Eulers metode
34 end
35
36 % Plotter resultatet
37 hold on
38 plot(xVektor,yVektor,'b-','linewidth',1)

```

Skriptet heter `EulersMetode.m`. Funksjonen $F(t, I)$ er gitt i en egen funksjonfil som heter `DerivFunk.m`:

```

function F=DerivFunk(x,y)

% Funksjonsfil som blir brukt i EulersMetode.
% Funksjonen tar to input-argument: y og x.

F=325*sin(100*pi*x)-5*y;

```

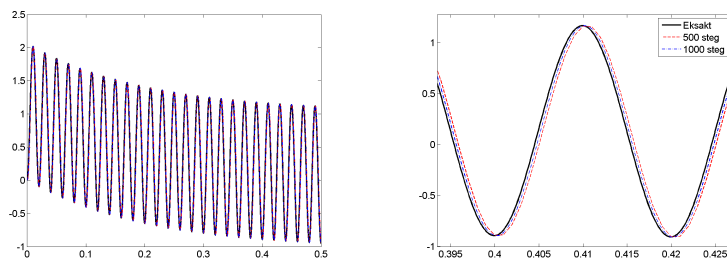
I denne implementeringa svarer 'y' til funksjonen I og 'x' til variabelen t . Vi plotter den analytiske løsninga fra b) sammen med det vi får når vi kjører skriptet over. I kommandovinduet kan det se slik ut:

```

>> t=0:1e-4:.5;
>> w=100*pi;
>> I=325/(w^2+25)*(5*sin(w*t)-w*cos(w*t)+w*exp(-5*t));
>> plot(t,I,'k-','linewidth',2)
>> EulersMetode
Gi antal steg: 500
>> EulersMetode
Gi antal steg: 1000

```

Resultatet er vist i figur 1. Vi ser at den numeriske løsninga ser ut til å



Figur 1: Figurene viser den eksakte løsninga av differensiallikninga i oppgave 2b) sammen med numeriske løsninger basert på Eulers metode. Vi har brukt to ulike steglengder – tilsvarende 500 og 1000 steg. Figuren til høyre er en forstørrelse av en del av figuren til venstre.

nærme seg den eksakte når vi øker antall steg. Med 1000 steg er løsningene ganske like.

Oppgave 3

a) Denne differensiallikninga er separabel

$$\begin{aligned}
 (1+x^2) \frac{dy}{dx} - e^{-y} &= 0 \\
 (1+x^2) \frac{dy}{dx} &= e^{-y} \\
 e^y dy &= \frac{1}{1+x^2} dx \\
 \int e^y dy &= \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 e^y &= \arctan x + C \\
 y &= \ln(\arctan x + C)
 \end{aligned}$$

Vi bestemmer C ved initialkravet:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0 \\
 \ln(\arctan 0 + C) &= 0 \\
 \ln C &= 0 \\
 C &= 1
 \end{aligned}$$

Løsning:

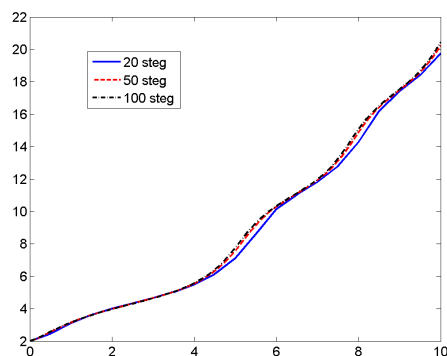
$$y(x) = \ln(\arctan x + 1) \quad .$$

b) Denne differensiallikninga er hverken lineær eller separabel. Vi løser den ved å bruke Eulers metode. Vi bruker implementeringa fra oppgave 2c) –

med noen små justeringer. For det første, funksjonsfila endres slik at vi nå har

$$F(x, y) = \sin y + \sqrt{x} \quad .$$

Videre endrer vi initialkravet i linje 10 og 11 i `EulersMetode.m`. Vi har valgt å la x gå til 10, og endrer linje 14 tilsvarende. Når vi kjører skriptet og bruker `hold on`-funksjonen, får vi plottet vist i figur 2.



Figur 2: Svaret i oppgave 3b). Grafen ser ut til å være noenlunde uavhengig av steglengda med 100 steg.

- c) Denne differensiallikninga er linær. Vi løser den ved å gange begge sider med integrerende faktor – altså $e^{F(x)}$ der F en antiderivert til 2. Vi velger $F = 2x$:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= x \\ e^{2x}(y + 2y') &= e^{2x} \cdot x \\ (e^{2x}y)' &= xe^{2x} \\ e^{2x}y &= \int xe^{2x} dx \end{aligned}$$

Integralet på høyre side løser vi ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{2x} &\Leftarrow v = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \end{aligned}$$

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Vi får:

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \\ y &= e^{-2x} \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Vi bestemmer C ved initialkravet:

$$\begin{aligned}y(0) &= -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} + Ce^{-2 \cdot 0} &= -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + C &= -\frac{1}{4} \\ C &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Løsning:

$$\underline{y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad .}$$

Også her kunne vi ha valgt å bruke “tippe-metoden”. Da begynner vi med å finne den generelle løsningen av den homogene differensiallikninga

$$y' + 2y = 0$$

ved å “tippe” at y er en eksponentialfunksjon, $y = e^{rx}$. Det gir at $y' = re^{rx}$. Vi setter dette inn:

$$\begin{aligned}re^{rx} + 2e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(r + 2) &= 0 \\ r + 2 &= 0 \\ r &= -2 \quad .\end{aligned}$$

Generell løsning: $y_h = Ce^{-2x}$.

Den inhomogene likninga har et førstegradspolynom på høyre side. Vi “tipper” at vi kan finne ei partikulær løsning ved å si at også y skal være et førstegradspolynom, $y = ax + b$. Det gir at $y' = a$, og vi setter dette inn i likninga:

$$\begin{aligned}a + 2(ax + b) &= x \\ 2ax + a + 2b &= x\end{aligned}$$

Siden dette skal stemme for alle x , må vi ha at $2a = 1$ og $a + 2b = 0$ slik at $a = 1/2$ og $b = -a/2 = -1/4$. Det gir den partikulære løsningen $y_p = x/2 - 1/4$. Den generelle løsningen blir nå summen av y_p og y_h :

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \quad .$$

C bestemmes ved initialkravet som over.