

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 4
Innleveringsfrist: 8. mars klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Løsningsforslag

Oppgave 1

- a) Om vi tenker oss at vi spiser x_1 hg banan, drikker x_2 hg lettmelk og spiser graut laga av x_3 hg havregryn, vil vi, i følge tabellen, få i oss $1 \cdot x_1 + 3x_2 + 11x_3$ gram protein, $0 \cdot x_1 + 2x_2 + 8x_3$ gram fett og $18x_1 + 5x_2 + 62x_3$ gram karbohydrat. Siden disse mengdene skulle være 6 gram, 4 gram og 40 gram, henholdsvis, får vi dette likningssettet:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & = & 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & = & 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & = & 40 \end{array} .$$

- b) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 40 \end{bmatrix}$$

Vi rekkereduserer denne til redusert trappeform:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 40 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -49 & -136 & -68 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -49 & -136 & -68 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 60 & 30 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av dette ser vi at $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1/2$. Vi får altså spise 50 g banan og 50 g graut. Dietten tillater ikke at vi drikker melk.

- c) Vi lar x_4 være antal hg vi spiser av egg. På venstre side i likningene over får vi et tillegg på henholdsvis $12x_4$ for protein, $16x_4$ for fett og $0x_4$ for

karbohydrat. Likningssystemet blir

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & +12x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & +16x_4 & = & 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & & = & 40 \end{array},$$

og totalmatrisa blir nå

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 12 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 16 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

Vi lar MATLAB redusere denne til redusert trappeform:

```
> M=[1 3 11 12 6; 0 2 8 16 4; 18 5 62 0 40]
M =
```

```

     1     3    11    12     6
     0     2     8    16     4
    18     5    62     0    40
```

```
> rref(M)
ans =
```

```

    1.00000    0.00000    0.00000   -9.06667    0.50000
    0.00000    1.00000    0.00000   -3.73333    0.00000
    0.00000    0.00000    1.00000    2.93333    0.50000
```

Altså, om vi skal tro MATLAB, er

$$\begin{aligned} x_1 - 9.067x_4 &= 0.5 \\ x_2 - 3.733x_4 &= 0 \\ x_3 + 2.933x_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 + 9.067x_4 \\ x_2 &= 3.733x_4 \\ x_3 &= 0.5 - 2.933x_4 \\ x_4 &\text{ er fri} \end{aligned}$$

Her må vi i praksis kreve at både x_1 , x_2 , x_3 og x_4 er større eller lik 0 av ganske opplagte årsaker. For x_3 gir dette at $0.5 - 2.933x_4 \geq 0 \Leftrightarrow x_4 \leq 0.5/2.933 \approx 0.170$. Altså må vi kreve at $x_4 \in [0, 0.17]$; vi kan maksimalt spise 17 g egg.

Oppgave 2

Gitt:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

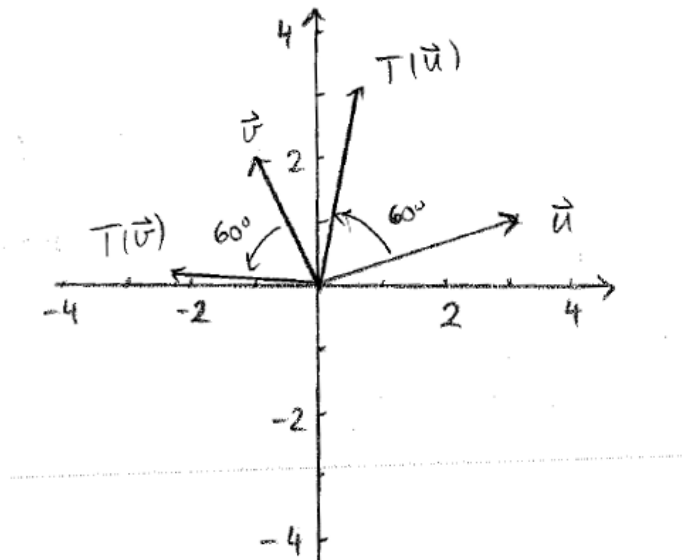
a) Med $\theta = \pi/3$:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \cdot 3 - \sqrt{3}/2 \cdot 1 \\ \sqrt{3}/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.63 \\ 3.10 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 + 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.23 \\ 0.13 \end{bmatrix}$$

b) Se figur 1.



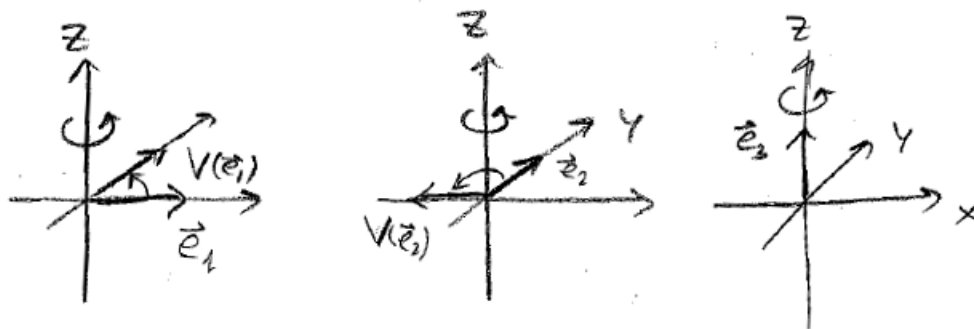
Figur 1: Svaret på deloppgave 2b).

c) Standardmatrisa til U , som vi kan kalle A , finner vi ved å sette inn $\theta = \pi/2$ i det gitte uttrykket:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Altså kan vi skrive transformasjonen U som $U(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ der $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Standardmatrisa til V , som vi kaller B , kan vi finne ved å sette inn transformasjonen av enhetsvektorene $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ som søyler, $B = [V(\mathbf{e}_1)|V(\mathbf{e}_2)|V(\mathbf{e}_3)]$. Om vi roterer $\mathbf{e}_1$, som er parallell med x -aksen, 90° mot klokka omkring z -aksen, får vi enhetsvektoren langs y -aksen – altså $\mathbf{e}_2$. Tilsvarende vil en slik rotasjon av $\mathbf{e}_2$ gi $-\mathbf{e}_1$, mens $\mathbf{e}_3$, som er parallell med z -aksen, forblir uforandret. Se figur 2.



Figur 2: Illustrasjon til deloppgave 2c).

Dermed blir standardmatrisa

$$B = [\mathbf{e}_2 | -\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

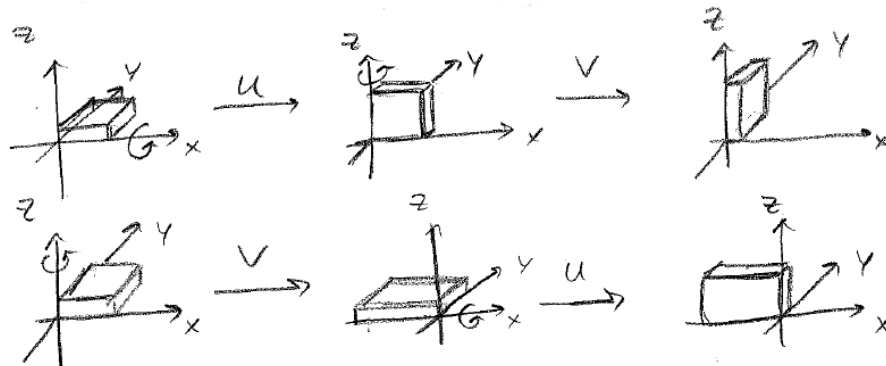
og $V(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$.

- d) Det er tydelig at rekkefølgen vi gjør disse rotasjonene i, spiller ei rolle. Dette er illustrert i figur 3. Her ser vi at boka havner i ulike stillinger dersom vi gjør rotasjonen U først og så V eller om vi først gjør transformasjonen V og så U .

- e) Vi kan skrive de sammensatte transformasjonene slik:

$$\begin{aligned} U(V(\mathbf{x})) &= U(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = AB\mathbf{x} \\ V(U(\mathbf{x})) &= V(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = BA\mathbf{x} \end{aligned}$$

Av dette ser vi at standardmatrisa til den sammensatte transformasjonen $U(V(\mathbf{x}))$ er AB , og at standardmatrisa for den sammensatte transforma-



Figur 3: Illustrasjon til deloppgave 2d).

sjonen $V(U(\mathbf{x}))$ er BA . Vi regner ut disse matriseproduktene:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at disse to standardmatrisene er ulike, noe som bekrefter konklusjonen fra forrige deloppgave: Rekkefølgen spiller en rolle.

Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan starte med å tilordne disse matrisene i kommandovinduet i MATLAB:

```
>> A=[0 2 -1; 2 -7 3];
>> B=[-1 1 1; -1 2 1; 3 -3 -2];
>> C=[1 2; 2 3];
>> D=[0 -3 3; 1 1 1; 2 4 0];
```

- a) A er ei 3×2 -matrise, B er ei 3×3 -matrise. Man kan bare legge sammen matriser med samme format; $A + B$ er ikke definert.

$$\begin{aligned}
 3B - 2D &= 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -3-0 & 3-(-6) & 3-6 \\ -3-2 & 6-2 & 3-2 \\ 9-4 & -9-8 & -6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -17 & -6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svarene i MATLAB:

```
>> A+B
Error using +
Matrix dimensions must agree.
```

```
>> 3*B-2*D
```

```
ans =
```

```

-3     9    -3
-5     4     1
 5   -17    -6
```

Vi ser at vi får ei feilmelding når vi forsøker å regne ut $A + B$.

b)

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-7) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + (-7) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Siden B har 3 søyler og A har 2 rekker, er ikke matriseproduktet BA veldefinert.

På samme måte, siden A har 3 søyler og C har 2 rekker, er heller ikke AC definert.

$$\begin{aligned}
 CA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-7) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-7) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & -12 & 5 \\ 6 & -17 & 7 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vi sjekker at MATLAB gir det samme:

```
>> A*B

ans =

    -5     7     4
    14    -21    -11

>> B*A
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.

>> A*C
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.

>> C*A

ans =

     4    -12     5
     6    -17     7
```

- c) Vi bestemmer B^{-1} ved å rekkeredusere matrisa $[B | I_3]$ til vi har I_3 til venstre. Da vil vi, dersom B er invertibel, ha B^{-1} høyre; $[B | I_3] \sim [I_3 | B^{-1}]$:

$$\begin{aligned}
[B | I_3] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \\
&\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I_3 | B^{-1}] \quad .
\end{aligned}$$

Altså:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Vi kontrollerer svaret i MATLAB:

```
>> inv(B)

ans =
```

$$\begin{array}{rrr} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 3.0000 & 0 & 1.0000 \end{array}$$

- d) Vi løser likninga som vanlig – ved å gjøre det samme på begge sider av likhetstegnet til vi har X alene på ei side:

$$\begin{aligned} BX^T + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ BX^T + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ BX^T &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ B^{-1}BX^T &= B^{-1} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ I_3 X^T &= \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 2 \\ -14 & 2 \end{bmatrix} \\ (X^T)^T &= \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 3 & 2 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}^T \\ X &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 & 3 & -14 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Vi kan kontrollere dette i MATLAB ved å regne ut venstre side i likninga:

```
>> B*X.'+[1 2; 0 -1; 2 0]
```

```
ans =
```

$$\begin{array}{rr} -3.0000 & 2.0000 \\ -1.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 2.0000 \end{array}$$

Vi ser at dette stemmer overens med høyre side.

e) Vi rekkereduserer D :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at vi ikke har noe ledende tall i søyle 3. Dermed vil x_3 i likninga $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ forbli ubestemt, slik at likninga har flere løsninger enn den trivielle. Altså er søylene i D lineært avhengige.

Om vi bruker 'rref'-funksjonen i MATLAB, får vi rekkeredusert D til redusert trappeform:

```
>> rref(D)
```

```
ans =
```

```

1     0     2
0     1    -1
0     0     0
```

Vi får bekrefte at D bare har to ledende tall når vi rekkereduserer matrisa til tappeform.