

Innlevering i	DAFE/ELFE 1000
	Oppgavesett 2
Innleveringsfrist:	28. februar klokka 14:00
Antall oppgaver:	4

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) i)

$$\int \sqrt{x} + 3x^{2.1} dx = \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 3\frac{1}{2.1+1}x^{2.1+1} + C = \underline{\underline{\frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{3}{3.1}x^{3.1} + C}}$$

ii) $\int x^2 \sin(\pi x) dx$

Delvis integrasjon: $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$.

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v' = \sin(\pi x) \Leftarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(\pi x) dx &= x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)\right) - \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)\right) dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) + \frac{2}{\pi} \int x \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

Vi gjør en ny delvis integrasjon på integralet på høyre side – denne gangen med $u = x$ og $v' = \cos(\pi x)$:

$$\int x \cos(\pi x) dx = x \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - \int 1 \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} x \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + C'$$

Dette setter vi inn i uttrykket over:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(\pi x) dx &= -\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} x \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) + C' \right) = \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) + \frac{2}{\pi^2} x \sin(\pi x) + \frac{2}{\pi^3} \cos(\pi x) + C}} \quad (C = 2C'/\pi^3). \end{aligned}$$

iii) $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx$

Vi begynner med å gjøre en polynomdivisjon – slik at vi får en brøk med et polynom i telleren som har lavere grad enn det i nevneren:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & : & (x^2 + 4) = x - \frac{4x}{x^2+4} \\ -(x^3 + 4x) & & \\ \hline -4x & & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+4} dx = \int \left(x - \frac{4x}{x^2+4} \right) = \frac{1}{2}x^2 - 4 \int \frac{x}{x^2+4} dx$$

Integralet på høyre side løser vi ved å innføre variabelbyttet $u = x^2 + 4$, som gir at $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{1}{2x} du$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2+4} dx &= \frac{1}{2}x^2 - 4 \int \frac{x}{u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2}x^2 - 2 \int \frac{1}{u} du = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \ln|u| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - 2 \ln(x^2 + 4) + C}} \quad . \end{aligned}$$

b) i) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$

Vi innfører variabelbyttet $u = x^2$, slik at $\frac{du}{dx} = 2x$ og $dx = \frac{1}{2x} du$.

Vidre er $u(0) = 0$ og $u(\sqrt{\pi}) = \pi$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx &= \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi})} x \sin u \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{1}{2} [-\cos u]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \underline{1} \end{aligned}$$

ii) $\int_0^2 \sin x^2 dx$

Dette integralet har ikke noen elementær antiderivert. Vi beregner integralet numerisk. Til det kan vi for eksempel bruke trapes-metoden eller en Riemann-sum. Om vi gjør det siste, og velger en regulær partisjon, får vi raskest konvergens om vi velger seleksjonen slik at x_i^* ligger i midten av hvert del-intervall. Det kan implementeres slik:

```
1 % Skript som regner ut en Riemann-sum for
2 % funksjonen f(x)=sin x^2.
3 % Det tilsvarende integralet går fra a til b, som er
4 % "hard-koda" i skriptet.
5 % Partisjonen er regulær, og seleksjonen er gitt
6 % ved midtpunktene.
7
8 % Grenser
9 a=0; b=2;
10
11 % Gir antall del-intervall:
```

```
12 N=input('Antall del-intervall: ');
13
14 % Partisjon
15 DeltaX=(b-a)/N;
16 P=a:DeltaX:b;
17
18 % Initierer summen
19 R=0;
20
21 % Summerer
22 for i=1:N
23     x=(P(i)+P(i+1))/2;    % Midtpunktet
24     R=R+sin(x.^2)*DeltaX;
25 end
26
27 %Skriver summen til skjerm
28 R
```

Det er viktig å variere antall del-intervaller for å kontrollere at svaret er mer eller mindre uavhengig av denne parameteren. Vi beregner Riemann-summen for stadig høyere antall del-intervaller:

```
>> RiemannSum
Antall del-intervall: 10
R =
    0.8093

>> RiemannSum
Antall del-intervall: 50
R =
    0.8050

>> RiemannSum
Antall del-intervall: 100
R =
    0.8048

>> RiemannSum
Antall del-intervall: 200
R =
    0.8048
```

Av dette ser integralet ut til å være 0.8048 – med fire desimalers nøyaktighet.

iii) $\int_{-2}^2 \sin x^3 dx$

Også her er integranden slik at den ikke har noen elementær antiderivert. Vi kan godt løse denne oppgava numerisk også – for eksempel ved å modifisere skriptet over. Men vi kan også gjøre det enklere: Integranden er en odde funksjon; $\sin(-x)^3 = \sin(-x^3) = -\sin x^3$. På grunn av dette, og siden intervallet vi skal integrere over er symmetrisk omkring null, får vi like store negative og positive bidrag til integralet. Integralet er altså 0.

Oppgave 2

a) Taylor-polynomet er

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \quad ,$$

der $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ og $a = 9$.

$$\begin{aligned} f(9) &= \sqrt{9} = 3 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(9) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3} \\ f''(9) &= -\frac{1}{4(\sqrt{9})^3} = -\frac{1}{108} \end{aligned}$$

Med dette får vi at

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{108}\right)(x-9)^2 = \\ &= \underline{3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2} \quad . \end{aligned}$$

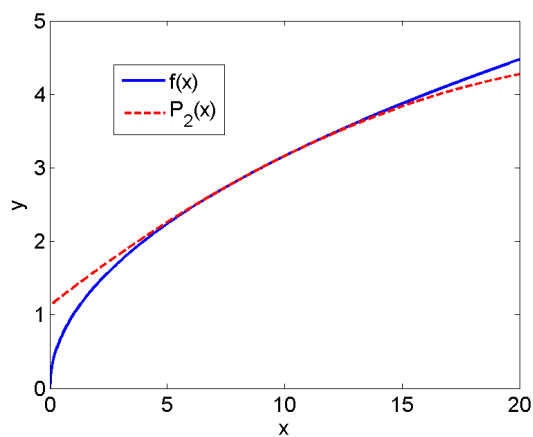
b) I kommando-vinduet i MATLAB kan det se slik ut når vi plotter:

```
>> x=0:1e-2:20;
>> f=sqrt(x);
>> P2=3+1/6*(x-9)-1/216*(x-9)^2;
Error using ^
Inputs must be a scalar and a square matrix.
To compute elementwise POWER, use POWER (.^) instead.

>> P2=3+1/6*(x-9)-1/216*(x-9).^2;
```

```
>> plot(x,f,'linewidth',2)
>> hold on
>> plot(x,P2,'r--','linewidth',2)
>> hold off
>> set(gca,'fontsize',15)
>> xlabel('x'); ylabel('y')
>> legend('f(x)','P_2(x)')
```

Plottet vi da får, er vist i figur 1.



Figur 1: Svaret på oppgave 3b).

c) Feilen $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ er gitt ved

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-9)^3 \quad ,$$

der c skal ligge mellom x og 9 (vi veit ikke hva c er). Vi deriverer igjen:

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8(\sqrt{x})^5} \quad .$$

Vi skal ha at $|R_2(c)| < 10^{-2}$ når $x > 9$:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\frac{3}{8(\sqrt{c})^5}}{3!} (x-9)^3 \right| &< 10^{-2} \\ \frac{1}{16(\sqrt{c})^5} (x-9)^3 &\leq \frac{(x-9)^3}{16(\sqrt{9})^5} = \frac{(x-9)^3}{3888} < 10^{-2} \\ (x-9)^3 &< \frac{3888}{100} = \frac{927}{25} \\ x-9 &< \sqrt[3]{\frac{927}{25}} \\ x &< 9 + \sqrt[3]{\frac{927}{25}} \approx 12.388\end{aligned}$$

Vi har her benyttet oss av at $\frac{1}{(\sqrt{c})^5} \leq \frac{1}{(\sqrt{9})^5}$ fordi $c \geq 9$.

Altså: $|f(x) - P_2(x)| < 10^{-2}$ når $x \in [9, 12.388]$; $b = 12.388$.

- d) For å kunne bruke Newtons metode, må likninga formuleres som et nullpunktsproblem:

$$\begin{aligned}f(x) - P_2(x) &= 10^{-2} \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad \text{der} \\ g(x) &= f(x) - P_2(x) - 10^{-2} = \sqrt{x} - \left(3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 \right) - 10^{-2}\end{aligned}$$

Dette er ei transendent likning som vi ikke har noen analytisk metode for å løse. Derfor bruker vi Newtons metode, som går ut på å iterere på uttrykket

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \quad .$$

I vårt tilfelle blir uttrykket slik:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{x_n} - 3 - \frac{1}{6}(x_n - 9) + \frac{1}{216}(x_n - 9)^2 - 10^{-2}}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}} - \frac{1}{6} + \frac{1}{108}(x_n - 9)} \quad .$$

Dette kan implementeres slik i MATLAB:

```
1 % Implementering av Newtons metode for problemet
2 % g(x)=0 med g(x) = f(x)-P_2(x) - 0.01 (se oppg. 2d) i oblig. 2)
3
4 % Start-gjetning:
5 x0=10;
6
7 % Presisjon
8 Pres=5e-5;
9
10 % Initierer x og gammel x
```

```
11 xGm=100;           % Her er tallet nokså tilfeldig valgt
12 x=x0;
13
14 % while-løkke som utfører iterasjonene
15 while abs(x-xGm)>Pres
16     xGm=x;
17     x=x-(sqrt(x)-3-1/6*(x-9)+1/216*(x-9)^2-0.01)/...
18         (1/(2*sqrt(x))-1/6+1/108*(x-9));
19 end
20
21 % Skriver svaret til skjerm
22 x
```

I linje 17 har vi brukt ‘...’ for å kunne bryte opp linja; den hadde blitt veldig lang ellers. Vi har valgt $x_0 = 10$. Merk at vi får problemer hvis vi velger $x_0 = 9$; da er den deriverte i nevneren null. Feil-toleransen er satt til $5 \cdot 10^{-5}$. Når vi kjører skriptet, som heter `NewtonMet.m`, får vi:

```
>> NewtonMet
x =
    12.6463
```

Altså, feilen $f(x) - P_2(x)$ er 10^{-2} når $x = 12.6463$. Legg merke til at denne x -verdien er høyere enn den b -verdien vi fant i deloppgave c) – som den skal være.

Oppgave 3

- a) $U(t) = 325 \sin(100\pi t)$
Gjennomsnittet er

$$\overline{U} = \frac{1}{p} \int_0^p U(t) dt$$

der p er perioden. Av funksjonsuttrykket ser vi at denne er gitt ved at $\frac{2\pi}{p} = 100\pi$, slik at $p = 1/50$ (målt i sekund). Vi får:

$$\begin{aligned} \overline{U} &= \frac{1}{\frac{1}{50}} \int_0^{1/50} 325 \sin(100\pi t) dt = 50 \cdot 325 \int_0^{1/50} \sin(100\pi t) dt = \\ &= 16250 \left[-\frac{1}{100\pi} \cos(100\pi t) \right]_0^{1/50} = -\frac{162.5}{\pi} (\cos(2\pi) - \cos 0) = \underline{0} \quad . \end{aligned}$$

Gjennomsnittet av U^2 er

$$\begin{aligned}\overline{U^2} &= \frac{1}{p} \int_0^p (U(t))^2 dt = 50 \cdot (325)^2 \int_0^p \sin^2(100\pi t) dt = \\ &= 5281250 \cdot \frac{1}{2} \int_0^p (1 - \cos(2 \cdot 100\pi t)) dt = 2640625 \left[t - \frac{1}{200\pi} \sin(200\pi t) \right]_0^p = \\ &= 2640625 \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{200\pi} \sin(4\pi) - \left(0 - \frac{1}{200\pi} \sin 0 \right) \right) = 52812\end{aligned}$$

Kvadratrotta av dette er $\sqrt{52812} \approx 229.81 \approx 230$. Altså er kvadratrotta av gjennomsnittet av kvadratet av spenninga 230 V.

b)

Tid (s)	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
Strøm (A)	0.86	0.57	-0.35	-0.72	-0.19	0.49	0.49

Vi kaller strømmen $f(t)$, der t er tida. For å estimere den deriverte, bruker vi denne formelen:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \quad .$$

Vi får

$$\begin{aligned}f'(1.2) &\approx \frac{f((1.2+0.4) \text{ s}) - f((1.2-0.4) \text{ s})}{2 \cdot 0.4 \text{ s}} = \frac{(-0.72 - 0.57) \text{ A}}{0.8 \text{ s}} = \underline{-1.6125 \text{ A/s}} \\ f'(1.0) &\approx \frac{f((1.0+0.2) \text{ s}) - f((1.0-0.2) \text{ s})}{2 \cdot 0.2 \text{ s}} = \frac{(-0.35 - 0.57) \text{ A}}{0.4 \text{ s}} = \underline{-2.3 \text{ A/s}}\end{aligned}$$

For å finne ladninga Q , må vi integrere. Vi har ikke noe funksjonsuttrykk for strømmen – bare en tabell. Vi bruker trapes-metoden:

$$\begin{aligned}Q &= \int_{0.4}^{2.8} f(t) dt \approx h \left(\frac{1}{2} f(0.4 \text{ s}) + f(0.8 \text{ s}) + f(1.2 \text{ s}) + f(1.6 \text{ s}) + \right. \\ &\quad \left. f(2.0 \text{ s}) + f(2.4 \text{ s}) + \frac{1}{2} f(2.8 \text{ s}) \right) = \\ &= 0.4 \text{ s} \cdot (0.5 \cdot 0.86 + 0.57 - 0.35 - 0.72 - 0.19 + 0.49 + 0.5 \cdot 0.49) \text{ A} = \underline{0.19 \text{ C}} \quad .\end{aligned}$$

Oppgave 4

Denne oppgava kan også løses ved Newtons metode. Siden integranden på venstre side er jevn, $\exp(-(-t)^2) = \exp(-t^2)$, og intervallet er symmetrisk om null, kan vi skrive integralet som $2 \int_0^x \exp(-t^2) dt$. Likninga vi skal løse blir altså $f(x) = 0$ med

$$f(x) = 2 \int_0^x e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} \quad .$$

Desverre klarer vi ikke å bestemme integralet analytisk. Vi må derfor regne ut $f(x)$ numerisk – for eksempel ved hjelp av trapes-integrasjon. Vi har lagt ei funksjonsfil som gjør dette:

```
1  function F=IntFunk(x)
2
3  % Funksjon som estimerer en funksjon som er to ganger
4  % integralet frå 0 til x av
5  %  $e^{-t^2}$  - minus 1/2. Til å bestemme integralet
6  % brukes trapes-metoden.
7  % Antall delintervall er "hard-koda" inn i funksjonsfila
8
9  % Del-intervall:
10 N=100;
11
12 % Vektor med t-verdier og y-verdier
13 dt=x/N;
14 tVektor=-x:dt:x;
15 yVektor=exp(-tVektor.^2);
16
17 % Initierer summen T
18 T=0;
19
20 % Første ledd:
21 T=T+dt/2*yVektor(1);
22 % For-løkke over alle indre punkt (vektorene har N+1 element)
23 for i=2:N
24     T=T+dt*yVektor(i);
25 end
26 % Siste ledd i trapes-summen
27 T=T+dt/2*yVektor(end);
28
29 % Regner ut selve funksjonen:
30 F=2*T-1/2;
```

Vi har valgt å kalle skriptet `IntFunk.m`. Her er antall del-intervaller i oppdelinga “hard-koda” – altså skrevet rett inn i skriptet. Dette er nok noe primitivt; det hadde nok vært mer smidig å la dette tallet, N , være en input-parameter til funksjonen sammen med x . Om vi hadde gjort dette i stedet, ville linje 1 sett slik ut:

```
function F=IntFunk(x,N)
```

og vi hadde sletta linje 5, 7 og 8.

Til forskjell fra $f(x)$, er $f'(x)$ lett å finne:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(2 \int_0^x e^{-t^2} dt - \frac{1}{2} \right) = 2e^{-x^2} \quad .$$

Vi justerer skriptet fra deloppgave 2 d) slik at det finner nullpunktet til vår nye $f(x)$:

```
1 % Implementering av Newtons metode for problemet gitt i
2 % oppgave 4 i obligatorisk innlevering nr. 2.
3
4 % Start-gjetning:
5 x0=1;
6
7 % Presisjon
8 Pres=1e-5;
9
10 % Initierer x og gammel x
11 xGm=100;
12 x=x0;
13
14 % while-løkke som implementerer iterasjonene
15 while abs(x-xGm)>Pres
16     xGm=x;
17     x=x-IntFunk(x)/(2*exp(-x^2));
18 end
19
20 % Skriv svaret til skjerm
21 x
```

Skriptet er identisk med det vi brukte i 2 d) bortsett fra linje 2 og 17, hvor vi refererer til funksjonfila over. Når vi kjører dette skriptet, er det viktig å være klar over at svaret vil være avhengig av hvor nøyaktig vi regner ut integralet. Det er derfor nødvendig å kjøre skriptet flere ganger med stadig høyere antall del-intervaller i funksjonsfila. Vi gjør dette med N-verdiene 10, 20, 50, 100 og 200. I kommando-vinduet ser det da slik ut:

```
>> format long
>> NewtonMet
x =
    0.256347745017921

>> NewtonMet
x =
    0.255889117908540

>> NewtonMet
x =
    0.255622999961193

>> NewtonMet
x =
```

0.255535776604249

>> NewtonMet

x =

0.255492440224143

Med fire desimaler ser altså svaret ut til å være $x = 0.2555$.