

Innlevering i	DAFE/ELFE 1000
	Oppgavesett 1
Innleveringsfrist:	31. januar klokka 14:00
Antall oppgaver:	3

Løsningsforslag

Oppgave 1

Løs disse likningene ved regning, og oppgi svarene eksakt:

- a) Vi kan for eksempel bruke at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \cos^2 x &= 0, & x \in [0, 2\pi) \\ 1 - \cos^2 x - \cos^2 x &= 0 \\ -2\cos^2 x &= -1 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\arccos 1/\sqrt{2} = \pi/4$ og $\arccos -1/\sqrt{2} = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Det gir disse løsningene:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \pm \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Eller, litt enklare: $x = \pi/4 + n\pi/2$. Sidan x skal ligge mellom 0 og 2π , får vi løsninga $x = \pi/4$ eller $x = 3\pi/4$ eller $x = 5\pi/4$ eller $x = 7\pi/4$.

Alternativt kunne vi ha brukt at $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ for å løse likninga, eller vi kunne ha delt på $\cos^2 x$ og fått ei likning med $\tan^2 x$.

- b)

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1 + 4e^{-x}} &= 2 \\ e^x &= 2(1 + 4e^{-x}) = 2 + 8e^{-x} \\ e^x - 2 - 8e^{-x} &= 0 \\ e^x(e^x - 2 - 8e^{-x}) &= e^x \cdot 0 \\ (e^x)^2 - 2e^x - 8 &= 0 \\ e^x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 \\ e^x = 1 - 3 = -2 &\quad \text{eller} \quad e^x = 1 + 3 = 4\end{aligned}$$

e^x kan aldri bli negativt. Vi får løsninga $x = \ln 4$.

Oppgave 2

- a) Å bli redusert med 10% tilsvarer at vi ganger med $100\% - 10\% = 0.9$. Dette skjer for hvert år. Derfor blir verdien etter n år 350 000 kr ganger med 0.9^n . Om bilen er verd $B(t)$ kr etter t år, får vi

$$B(t) = 350000 \cdot 0.9^t \quad .$$

Bilen vil bare tape seg i verdi. Vi finner når $B(t)$ bikker 100 000:

$$\begin{aligned} B(t) &= 100000 \\ 350000 \cdot 0.9^t &= 100000 \\ 0.9^t &= \frac{100000}{350000} = \frac{2}{7} \\ t \ln 0.9 &= \ln \frac{2}{7} \\ t &= \frac{\ln \frac{2}{7}}{\ln \frac{9}{10}} = \frac{-\ln \frac{7}{2}}{-\ln \frac{10}{9}} = \frac{\ln 7 - \ln 2}{\ln 10 - \ln 9} \approx 11.89 \end{aligned}$$

Bilen blir verd mindre enn 100 000 kr etter 11.89 år.

- b) Spenninga $U(t)$, der t er tida, skal følge en sinus-funksjon:

$$U(t) = a \sin(k(t - \varphi)) \quad .$$

Her er $|a|$ amplituden, og $k = 2\pi/p$ der p er perioden. Her er amplituden 325 V. Siden spenninga har 50 perioder på et sekund, er perioden $1/50$ sekund. Dermed blir

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{50} \text{ s}} = 100\pi \text{ s}^{-1} \quad .$$

Siden vi vet at $U(0) = 0$ og $\sin 0 = 0$, kan vi sette fasen $\varphi = 0$ her. Vi får:

$$U(t) = 325 \text{ V} \sin(100\pi \text{ s}^{-1} t) \quad .$$

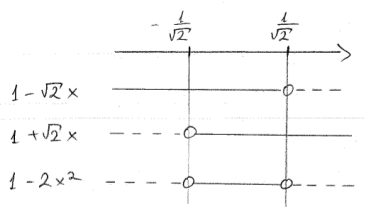
Slik som oppgava er formulert, er også $-325 \text{ V} \sin(100\pi \text{ s}^{-1} t)$ et ok svar.

- c)

$$g(x) = \sqrt{1 - 2x^2} \quad .$$

Uttrykket under rot-tegnet kan ikke være negativt:

$$\begin{aligned} 1 - 2x^2 &\geq 0 \\ (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x) &\geq 0 \end{aligned}$$



Figur 1: Forteiknskjema for ulikskapen $1 - 2x^2 \geq 0$.

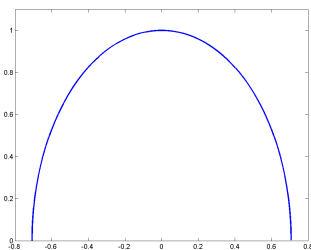
Av forteiknskjemaet, figur 1, ser vi at $D_g = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

g er maksimal når $1 - 2x^2$ er maksimal. x^2 kan aldri bli mindre enn 0, så g blir maksimalt 1. Vidre kan ikke et kvadratrots-uttrykk bli mindre enn 0. For $x = \pm 1/\sqrt{2}$ blir g null. Siden g er kontinuerlig, vil også funksjonen ta alle verdier mellom 0 og 1 slik at verdimengda $V_g = [0, 1]$.

Vi undersøker om g er en-entydig:

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ y &= \sqrt{1 - 2x^2} \\ y^2 &= 1 - 2x^2 \\ x^2 &= \frac{1 - y^2}{2} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{1 - y^2}{2}} \end{aligned}$$

Vi ser vi får to løsninger for x . Altså er funksjonen *ikke* en-entydig. Dette ser vi også tydelig om vi skisserer grafen til g – se figur 2.



Figur 2: Plot av figuren $g(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$.

d) Funksjonen er opplagt kontinuerlig for $h \neq 0$. Vi undersøker om T er

kontinuerlig også for $h = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (1 - h/10) = 1 - 0/10 = 1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(h)\end{aligned}$$

Grenseverdien $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$ er veldefinert og lik 1. Siden også $T(0) = 1$, er T kontinuerlig også for $h = 0$.

Oppgave 3

$$f(x) = x - 4 \cos^2 x + 1, \quad D_f = [0, 2].$$

a)

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 - 4 \cdot \cos^2 0 + 1 = -3 < 0 \\ f(2) &= 2 - 4 \cdot \cos^2 2 + 1 \approx 2.307 > 0\end{aligned}$$

Siden f er en elementær funksjon, må den være kontinuerleg. Da $f(0)$ og $f(2)$ har ulike forteikn, må f ha minst ett nullpunkt på D_f ved skjæringssetninga.

b)

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' + 0 = \underline{1 + 8 \cos x \sin x} = \underline{1 + 4 \sin 2x} \quad .$$

Ekstremalpunkt: Randpunkt eller punkt der f' endrer fortegn. Siden f' er kontinuerlig, må f' være 0 der den skifter fortegn.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ 1 + 4 \sin 2x &= 0 \\ \sin 2x &= -1/4\end{aligned}$$

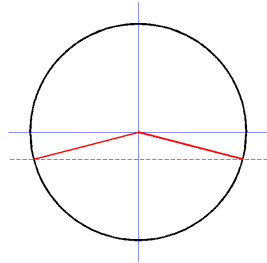
$\arcsin -1/4 \approx -0.2527$ slik at $2x = -0.2527 + n \cdot 2\pi$ eller $2x = \pi - (-0.2527) + n \cdot 2\pi$ der $n \in \mathbb{Z}$. Se figur 3.

Det gir at $x = -0.1263 + n\pi$ eller $x = 1.6971 + n\pi$. Med vår definisjonsmengde får vi bare løsninga $x = 1.6971$. Funksjonsverdiene for randpunktene fant vi i a). For $x = 1.6971$ får vi

$$f(1.6971) = 1.6971 - 4 \cos^2 1.6971 + 1 = 2.634 \quad .$$

Av funksjonsverdiene ser vi at $(0, -3)$ er globalt minimum og $(1.697, 2.643)$ er globalt maksimum.

c) Plottinga kan gjøres slik i kommandovinduet i MATLAB:



Figur 3: Einingssirkelen med sinus-verdien $-1/4$ teikna inn – sammen med dei tilsvarande vinklane i fyrste omløp.

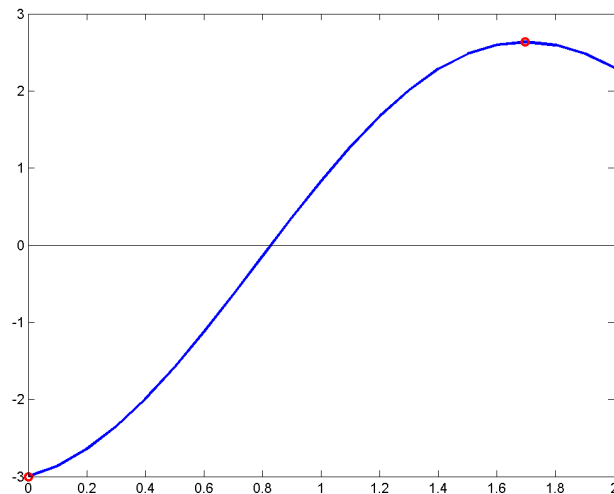
```
>> x=0:.1:2;
>> f=x-4*(cos(x)).^2+1;
>> plot(x,f,'linewidth',2)
>> hold on
>> plot([0 1.697],[-3 2.634],'ro','linewidth',2)
>> plot([0 2],[0 0],'k-')
>> hold off
```

Den siste plotte-kommandoen har vi gjort for å gjøre x -aksen synlig. (Dette kan også gjøres på andre måter.) Vi har også valgt å gjøre grafen litt tykkere enn standarden. Resultatet er vist i figur 4.

Av figuren ser vi at f bare ser ut til å ha ett nullpunkt, og at dette ser ut til å ligge ved $x \approx 0.8$.

d) Halveringsmetoden kan implementeres slik:

```
1 % Skript som implementerer halveringsmetoden.
2 % Det er viktig at funksjonen er kontinuerlig på hele
3 % intervallet mellom endepunktene. Det forutsettes også
4 % at funksjonen har ulik funksjonsverdi i endepunktene.
5
6 % Endepunkter:
7 a=0;
8 b=2;
9
10 % Funksjonsverdier:
11 fa=a-4*(cos(a))^2+1;
12 fb=b-4*(cos(b))^2+1;
```



Figur 4: Plott av funksjonen i oppgave 3. Dei globale ekstremalpunkta er også markert

```

13
14 % Nøyaktighet
15 pres=1e-3;
16
17 % While løkke som kjører så lenge intervallet
18 % er lengre enn pres:
19 while abs(b-a)>pres
20     c=(a+b)/2;           % Midtpunkt
21     fc=c-4*(cos(c))^2+1; % Funksjonsverdi i midtpunkt
22     if fa*fc>0           % Undersøker fortegn
23         a=c;             % Flytter venstre grense
24     else
25         b=c;             % Flytter høyre grense
26     end
27 end
28
29 % Skriver løsning til skjerm:
30 x=(a+b)/2

```

Dette skriptet har jeg kalt `HalveringsMet.m`. Når jeg kjører det i MATLAB¹, får eg dette svaret:

¹Pass på at du er i samme mappe som skriptet ligger lagra i når du skal kjøre det.

```
>> HalveringsMet
```

```
x =
```

```
0.8286
```

Det bør nevnes at skriptet over har forbedringspotensial. For eksempel ser vi at funksjonsuttrykket er skrevet opp tre ganger – i linje 11, 12 og 21. Dette kunne vært unngått ved å bruke ei funksjonfil, for eksempel. Dette ville også gjort det lettere å tilpasse koden til å løse andre likninger. Vi ser også at koden ikke er idiotsikker i den forstand at den gir et svar selv om $f(a)$ og $f(b)$ hadde hatt samme fortegn. Det hadde ikke vært noe problem å legge inn en liten `if`-sats som kontrollerte at fortegnene var ulike og eventuelt stoppet derom de ikke var det. Til sist kan det nevnes at grensene `a` og `b`, linje 7 og 8, godt kunne bli gitt som inn-parametre fra kommandovinduet – for eksempel ved å bruke `input`-kommandoen. Men for all del: Skriptet *gjør* jobben.

- e) Først må likninga formuleres som et nullpunkts-problem: $\frac{e^x}{1+4e^{-x}} - 2 = 0$. Vi ser at nemneren i brøk-uttrykket aldri kan bli null, så den elementære funksjonen på venstre side i likninga *er* kontinuert og veldefinert på hele $\mathbb{R}$. Ved insetting finner vi at uttrykket er -0.900 for $x = 1$ og 2.794 for $x = 2$. Altså må likninga ha ei løsning mellom 1 og 2. Vi tilpasser skriptet etter denne funksjonen og disse grensene. I tillegg justerer vi nøyaktigheten etter det som står i oppgava, og vi legger inn en funksjon som teller antall iterasjoner. Med disse justeringene blir skriptet sende slik ut:

```
1 % Skript som implementerer halveringsmetoden.
2 % Det er viktig at funksjonen er kontinuert på hele
3 % intervallet mellom endepunktene. Det forutsettes også
4 % at funksjonen har ulik funksjonsverdi i endepunktene.
5
6 % Endepunkter:
7 a=1;
8 b=2;
9
10 % Funksjonsverdier:
11 fa=exp(a)/(1+4*exp(-a))-2;
12 fb=exp(b)/(1+4*exp(-b))-2;
13
14 % Nøyaktighet
15 pres=1e-4;
16
17 % Initierer teller
18 teller=1;
19
```

```
20 % While løkke som kjører så lenge intervallet
21 % er lengre enn pres:
22 while abs(b-a)>pres
23     c=(a+b)/2;           % Midtpunkt
24     fc=exp(c)./(1+4*exp(-c))-2; % Funksjonsverdi i midtpunkt
25     if fa*fc>0           % Undersøker fortegn
26         a=c;             % Flytter venstre grense
27     else
28         b=c;             % Flytter høyre grense
29     end
30     teller=teller+1;     % Telleren økes med én
31 end
32
33 % Skriver løsning til skjerm:
34 x=(a+b)/2
35 % Skriver antall iterasjoner til skjerm:
36 Iterasjoner=teller

Det som er nytt eller endra i forhold til den forrige versjonen, finner vi i
linjene 7, 11, 12, 17, 18, 30, 36 og 36. Når vi kjører det, får vi:

>> HalveringsMet

x =

    1.3863

Iterasjoner =

    15

>> log(4)

ans =

    1.3863

>> format long
>> x

x =

    1.386322021484375

>> log(4)
```

`ans =`

`1.386294361119891`

Som vi ser, stemmer dette godt med den eksakte løsninga vi har funnet fra før ($x = \ln 4$); løsningene skiller seg ikke før i 5. desimal. Det tok 15 iterasjoner å oppnå denne nøyaktigheten.