
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 9

Numerisk integrasjon

Tema for dette settet er numerisk integrasjon. Dette er vi jo godt i gang med allerede; Riemann-summer er en helt ok måte å estimere bestemte integraler på – særlig om vi bruker midtpunktsseleksjoner. Her skal vi introdusere en metode til, nemlig trapes-integrasjon.

I denne sammenhengen er det også vanlig å prate om Simpson-integrasjon, som gir noe bedre estimater enn trapes-metoden. Det kommer vi imidlertid ikke til å gjøre i dette kurset. Derimot vil vi til slutt i settet komme innom en helt annen metode: Monte Carlo-integrering. Denne metoden er ikke pensum, så dersom du ikke er spesilet nysjerrig på denne metoden, kan du hoppe over denne oppgava med god samvittighet. Men metoden er både artig og nyttig – ikke minst når det gjelder integraler over flere variable.

Oppgave 1 – Trapes-integrasjon

Forhåpentligvis lærte vi i forrige leksjon at dersom man skal estimere et integral ved en Riemann-sum over en regulær partisjon, er det generelt best å velge en seleksjon gitt ved midpunktet i hvert del-intervall. Man kan vise at feilen, differansen mellom Riemann-summen og integralet, går mot null like fort som når man bruker trapes-metoden. Her skal vi se nærmere på trapes-metoden. Vi kommer til å fortsette med å dele integrasjonsområdet opp i like store del-intervaller. Metoden går ut på å estimere integralet $\int_a^b f(x) dx$ med summen T_n der

$$T_n = \frac{\Delta x}{2} f(x_0) + \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_{n-1}) + \frac{\Delta x}{2} f(x_n) \quad .$$

Det bør legges til at trapsemetoden også kan brukes selv om man ikke deler integrasjonsområdet opp regulært.

- a) La den regulære partisjonen $\mathcal{P}$ dele intervallet $[a, b]$ i kun to deler. La $\mathcal{S}_v$ og $\mathcal{S}_h$ være venstre- og høyre-seleksjoner som i oppgave 3 i leksjon 8 – gitt

ved henholdsvis $x_{i-1}^* = x_{i-1}$ og $x_i^* = x_i$. For en integrerbar-funksjon $f(x)$, vis at gjennomsnittet av høgre- og venstre-Riemann-summene $\mathcal{R}_{\mathcal{P}, \mathcal{S}_v}$ og $\mathcal{R}_{\mathcal{P}, \mathcal{S}_h}$ faktisk gir det samme som trapes-metoden for $\int_a^b f(x) dx$ med 2 delintervall. Dette resultatet lar seg generalisere til n delintervaller.

- b) Lag et skript som, med små justeringer, løser alle del-oppgavene i oppgave 1, delkapittel 5.4, og bruk skriptet til å gjøre denne oppgava. Om du vil, kan du ta med deg følgende hint om hvordan skriptet kan lages:

- Tilordne integrasjonsgrensene, kall de gjerne for “a” og “b”.
- Sett trapes-estimatet, som vi for eksempel kan kalle “T”, til 0.
- Bestem hvor mange del-intervall, n , du vil dele $[a, b]$ opp i. Bruk gjerne `input`-funksjonen til dette. Bestem lengda, Δx , av hver av disse delintervallene.
- Begynn med å legge det første og det siste leddet, altså $\frac{\Delta x}{2} \cdot T(x_0)$ og $\frac{\Delta x}{2} \cdot T(x_n)$, til T.
- Lag ei `for`-løkke som løper gjennom alle indre punkter i summen – altså frå $i = 1$ til $i = n - 1$. Merk: I formelen over har vi starta indekseringa av x på 0 og slutta på n . Indeksering av vektorer i MATLAB starter ikke på 0 men på 1. Derfor hadde kanskje denne måten å skrive formelen på vært mindre forvirrende:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2} f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_n) + \frac{\Delta x}{2} f(x_{n+1}) \quad .$$

- Skriv T til skjerm.
- c) For oppgave 1 a) og b) i delkapittel 5.4: Basert på dine egne numeriske og analytiske utregninger, vurdér hvor stor n må være i de to tilfellene for at feilen, $|T_n - \int_a^b f(x) dx|$, skal være mindre enn 1 % av den eksakte verdien av integralet.

Det finnes analytiske feil-estimer for trapes-metoden som kan brukes for å si noe om hvor høy n bør være for en gitt presisjon. Men her er det ikke meningen at du skal bruke disse; du skal helt enkelt sammenligne T_n med den eksakte verdien av integralet for ulike n -verdier.

Oppgave 2 – Uten “fasit”

I denne oppgava skal vi blant annet regne ut integralet

$$\int_0^2 \sin x^2 dx \quad .$$

- a) Bruk skriptet du lagde i oppgave 1 til å finne ei tilnærming til dette integralet. Hvordan kan du, ved å variere n , si noe om nøyaktigheten i utregninga? Hva ser integralet ut til å bli? (Sagt på en annen måte: Hva ser det ut til å *konvergere* mot?)

- b) Hvorfor har vi ikke bedt deg finne dette integralet ved anti-derivasjon?
- c) På samme måte over: Forsøk å bestemme følgende integral med minst tre riktige desimaler:
- i) $\int_{-5}^2 te^{t^3} dt$
 - ii) $\int_0^{1/2} \tan(x^2 + 1) dx$
 - iii) $\int_{-2}^2 \sin x^3 dx$
- d) Selv om vi ikke kan finne noen elementær antiderivert til $\sin x^3$, kan vi likevel si med sikkerhet at $\int_{-2}^2 \sin x^3 dx = 0$. Hvorfor kan vi være så sikre på dette?
- e) Endre den øvre integrasjonsgrensa i integralet i deloppgave d) ii) til 1. Hva skjer når du forsøker å regne ut integralet? Hvorfor skjer dette?

Generelt er det helt essensielt at vi sjekker at svaret vårt *konvergerer* før vi konkluderer med at vi har bestemt integralet; vi kan ikke tillate at svaret vi får skal være avhengig av n eller Δx .

Oppgave 3 – Taket på et tårn

Vi tenker oss at taket på et tårn har en profil gitt ved funksjonen

$$f(x) = \tan(1 - x) \quad , \quad D_f = [0, 1] \quad .$$

Både f og x er her gitt i meter.

- a) Hvor høyt er dette taket?
- b) Vi kan bruke formelen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

til å bestemme hvor langt det er langs taket fra kanten til toppen. Finn denne lengda.

- c) Volumet av taket og det som er under kan vi finne ved å bruke formelen

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx \quad .$$

Hva blir dette volumet?



Ekstra: Oppgave 4 – Monte Carlo-integrering

Bare så det er sagt: Denne metoden er ikke pensum. Men den kan være verd å se litt på likevel. Teorien er ikke vanskelig.

Vi har sett at middelverdien, eller gjennomsnittet, av en integrerbar funksjon f på intervallet $[a, b]$ er definert som

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad .$$

Samtidig vet vi at vi kan finne gjennomsnittet ved å gjøre mange “målinger”, legge dem sammen og dele på antallet. Tenk deg at vi velger mange x -verdier tilfeldig og finner $f(x)$ for hver av dem slik at vi får et sett med f -verdier: $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Her har vi gjort n “målinger”. Om n er stor nok, vil vi, som sagt, kunne finne gjennomsnittet slik (s. 237 i læreboka):

$$\bar{y} \approx \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad .$$

- a) Ut fra det som står over, forklar hvorfor

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

for store n .

- b) Funksjonen `rand` i MATLAB gir et tilfeldig¹ tall mellom 0 og 1. Hvordan kan dette brukes til å generere et tilfeldig tall mellom a og b ?
- c) Velg deg en funksjon f og endepunkter a og b og beregn $\int_a^b f(x) dx$ ved anti-derivasjon. Du kan godt velge et du har sett på før. Lag et skript eller ei funksjonsfil som beregner integralet i b) ved hjelp av formelen fra a). La n være en input-variabel. Undersøk hvor stor n må være for at metoden skal gi et rimelig nøyaktig svar. Lag gjerne et plott som illustrerer konvergens.

¹En datamaskin er ikke egentlig i stand til å generere tilfeldige tall; tallet du får ut er et *pseudo-tilfeldig* tall.