
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 8

Riemannsummer

I dette settet skal vi, som varsla i leksjon 3, regne ut Riemann-summer. Disse kan vi bruke til å estimere integral.

Oppgave 1 – Riemann-summer

Gjør oppgave 1 i delkapittel 5.1 i læreboka. For å gjøre dette, kan du enten skrive et skript selv eller bruke forslaget under. Man lærer nok mest av å gjøre det første...

```
1 % Skript som berregner en Riemann-sum til en funksjon.
2 % Denne funksjonen er gitt i funksjonsfila Funk.m
3
4 % Partisjon:
5 P=[1, 1.2, 1.5, 2, 2.1, 2.7, 3];
6 % Seleksjon:
7 S=[1.1, 1.3, 2, 2, 2.5, 2.85];
8
9 % Antall element i seleksjon
10 N=length(S);
11
12 % Starter med å sette Riemann-summen til 0:
13 Rps=0;
14 % for-løkke som regner ut Riemann-summen
15 for i=1:N
16     DeltaXi=P(i+1)-P(i);
17     xStjerne=S(i);
18     Rps=Rps+Funk(xStjerne)*DeltaXi;
19 end
20 %Skriver Riemann-summen til skjerm
21 Rps
```

Du kan skrive av skriptet eller laste det ned fra Fronter (der heter det “**RiemannSum.m**”). Dette skriptet refererer til ei funksjonsfil som heter “**Funk.m**” (linje 18). Denne kan for eksempel se slik ut:

```
function F=Funk(x)

% Dette er funksjon vi bruker for å rekne ut Riemann-summer.
% Funksjonen tar vektor-argument

F=x.^3;
```

Husk at denne skal ligge i samme mappe som skriptet¹. Denne funksjonsfila oppdaterer vi og tilpasser hver av deloppgavene. Når du endrer på dette skriptet for å legge inn nye partisjoner og seleksjoner i linje 5 og 7, kan dette alltid gjøres “for hånd”. Men i mange av disse deloppgavene kan du spare tid ved å angi **P**- og **S**-vektorene på en litt mer effektiv måte. Funksjonen du skal regne ut Riemannsummer for, oppdaterer du i funksjonsfila.

Oppgave 2 – Enda en Riemann-sum

Her tar vi utgangspunkt i oppgave. 3, delkapittel 5.1 i læreboka.

La $f(x) = x^2$ og la $\mathcal{P}_n$ være en regulær partisjon av intervallet $[0, a]$ med n delintervall. (En regulær partisjon er en partisjon hvor alle delintervaller er like lange.)

Altså: $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ der $x_0 = 0$, $x_n = a$ og $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ for $1 \leq i \leq n$. Vi lar seleksjonen $\mathcal{S}_n$ være gitt ved at $x_i^* = x_i$.

- Forklar hvorfor $\Delta x_i = a/n$ for alle i .
- Med papir og blyant: Bestem Riemannsummen $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n}$. Du kan få bruk for denne formelen:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad .$$

- Bruk svaret i a) sammen med setning 5.1.5 i læreboka til å bestemme integralet $\int_0^a x^2 dx$.
- Velg en $a > 0$ og en n og lag et skript for MATLAB som beregner $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n}$. Velg stadig høyere verdier for n og kontroller at Riemann-summen faktisk nærmer seg integralet. Når n stadig skal endres, kan man unngå å måtte forandere selve skriptet hver gang hvis man bruker **input**-kommandoen i MATLAB. Se gjerne på MATLABs egen dokumentasjon for å finne ut hvordan denne kommandoen fungerer.

¹-Med mindre man har lagt funksjonen inn i *søkestien* til MATLAB. Dette skal vi ikke komme nærmere inn på i dette kurset.

Som sagt tidligere: Det kan synest noe meningsløst å skrive et skript som løser et problem numerisk når vi allerede har klart å løse det analytisk. Derfor bør det presiseres at dette eksempelet er ment som ren øvelse. Men øvelsen er nyttig fordi mange integraler kan være problematiske eller umulige å beregne analytisk. Dette skal vi se nærmere på senere. I tillegg er det alltid en god vane å kontrollere det vi implementerer mot kjente løsninger.

Oppgave 3 – Høgre-, venstre- eller midtseleksjon: Hva er best?

Før du begynner: Vil du tippe?

a) Velg deg en eller annen passe komplisert elementær funksjon som du klarer å antiderivere, og kall den $f(x)$. Hvis du velger f til å være et polynom, bør den ha grad 3 eller høyere. Velg deg også en a og en b , $a < b$, og regn ut $\int_a^b f(x) dx$ eksakt ved anti-derivasjon. (Vi har enda ikke gått gjennom sammenhengen mellom integrasjon og anti-derivasjon i dette kurset, men vi unner oss å ta dette litt på forskudd.)

b) La den regulære partisjonen $\mathcal{P}_5$ dele intervallet $[a, b]$ inn i 5 like store del-intervaller, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... og $[x_4, x_5]$. Hva blir $x_0, x_1, \dots, x_5$?

Δx_i blir det samme for hver i . Hvilken verdi får Δx ?

La seleksjonene $\mathcal{S}_{5,v}$, $\mathcal{S}_{5,h}$ og $\mathcal{S}_{5,m}$ være gitt ved henholdsvis $x_i^* = x_{i-1}$, $x_i^* = x_i$ og $x_i^* = (x_{i-1} + x_i)/2$. (“v”, “h” og “m” står for henholdsvis “venstre”, “høgre” og “midt”.)

Bestem Riemann-summene $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_5, \mathcal{S}_{5,v}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_5, \mathcal{S}_{5,h}}$ og $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_5, \mathcal{S}_{5,m}}$ ved å skrive et lite skript for MATLAB. Ta gjerne utgangspunkt i skriptet over.

c) Generalisér skriptet du laget i b) slik at det deler $[a, b]$ opp i n delintervaller der n skal være en (input-) variabel i skriptet. Du kan angi verdien til n direkte i skriptet, såkalt “*hard-koding*”, eller ved å bruke `input`-kommandoen. Et annet alternativ kan være er å gjøre skriptet om til funksjonsfiler – en for hver av de tre seleksjonene. Argumentet til funksjonene skal i så fall være n .

d) Regn ut de tre Riemann-summene fra c) for forskjellige n -verdier, og sammenlign summen med den eksakte verdien for integralet som du fant i a). Ser du noen tendenser?

e) **Ekstra:** Forsøk å lage et plott som viser grafene til

$$\left| \mathcal{R}_{\mathcal{P}_n, \mathcal{S}_{n,v/h/m}} - \int_a^b f(x) dx \right|$$

som funksjoner av n . Det er altså snakk om tre grafer – en for venstre-, en for høgre- og en for midt-seleksjonen. Her er definisjonsmengden $\mathbb{N}$ –

ikke $\mathbb{R}$ – for alle tre funksjonene, så det passer nok best å plotte punktene uten linjer mellom. Du kan også vurdere å bruke `loglog`-funksjonen til å plotte med i stedet for `plot`-funksjonen.

Vektorene med “ y -verdier” som skal plottes, kan lages ved å regne ut verdiene én for én i kommandovinduet. Men det er nok ryddigere og enklere å lage et skript som gjør det.

Og moralen er...?