Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 6

Løsningsforslag

Oppgave 1 – Funksjoner og tangenter

2.1: 15 a) Vi plotter grafen med et rutenett:

```
> x=-3:.1:3;
> y=x.^2;
> plot(x,y)
> grid on
> axis([-2 3 -3 10])
```

Vi prøver å tegne inn en tangent for $x = 2$. Dette har vi illustrert i figur 1. Ut fra figuren, kan det set ut til at stigningstallet til tangenten er

$$\frac{7.8 - 0}{3 - 1} = \underline{3.9} \quad .$$

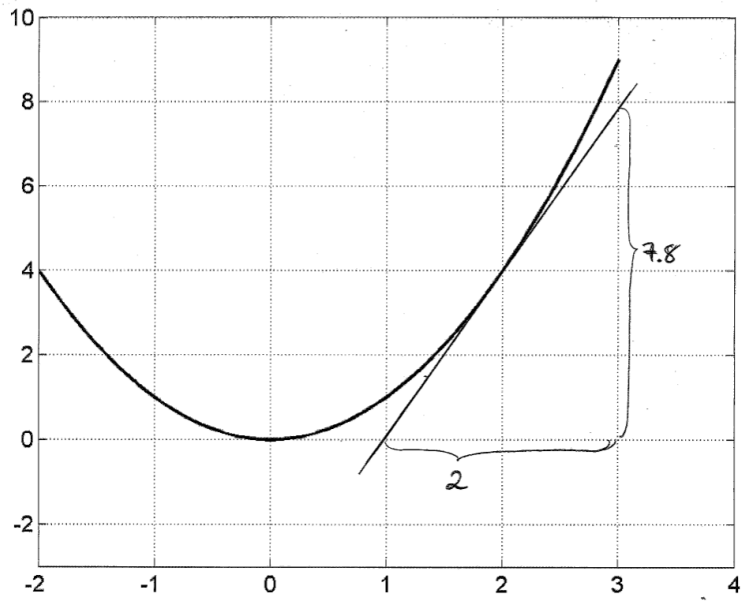
Dette stemte jo ganske bra med det eksakte svaret 4:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(2) &= 2^2 = 4 \\ f'(x) &= 2x \\ f'(2) &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Likninga for tangenten kan vi finne ved formelen

$$y - y_0 = a(x - x_0) \quad ,$$

der a er stigningsallet til linja og (x_0, y_0) er et punkt på linja. Vi får: $y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$. Grafen til f og tangenten i $(2, 4)$ er vist oppe til venstre i figur 2. Figuren er laga på denne måten i MATLAB:



Figur 1: Her har vi plotta grafen til funksjonen i oppgave 2.1: 1 og forsøkt å tegne inn tantenten i punktet $(2, f(2))$.

```
> x=-3:.1:3;
> y=x.^2;
> tang=4*x-4;
> plot(x,y)
> hold on
> plot(x,tang,'r')
> hold off
> axis([-2 3 -3 10])
```

2.1: 15 b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2} \\ f(2) &= \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ f'(2) &= \frac{2}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Likning for tangent:

$$y - \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}} \quad .$$

I MATLAB vel vi å plotte grafane for $x \in [-2, 3]$:

```
> x=-2:.1:5;
```

```
> y=sqrt(1+x.^2);
> tang=2/sqrt(5)*x+1/sqrt(5);
> plot(x,y)
> hold on
> plot(x,tang,'r')
> hold off
> axis([-2 3 -3 5])
```

Grafen til f og tangenten er vist oppe til høgre i figur 2.

2.1: 15 c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ f(2) &= \ln 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Likning for tangenten: $y - \ln 2 = 1/2\,(x-2) \Leftrightarrow y = x/2 - 1 + \ln 2$. Vi plotter:

```
> x=.1:1e-2:4;
> y=log(x);
> tang=.5*x-1+log(2);
> plot(x,y)
> hold on
> plot(x,tang,'r')
> hold off
```

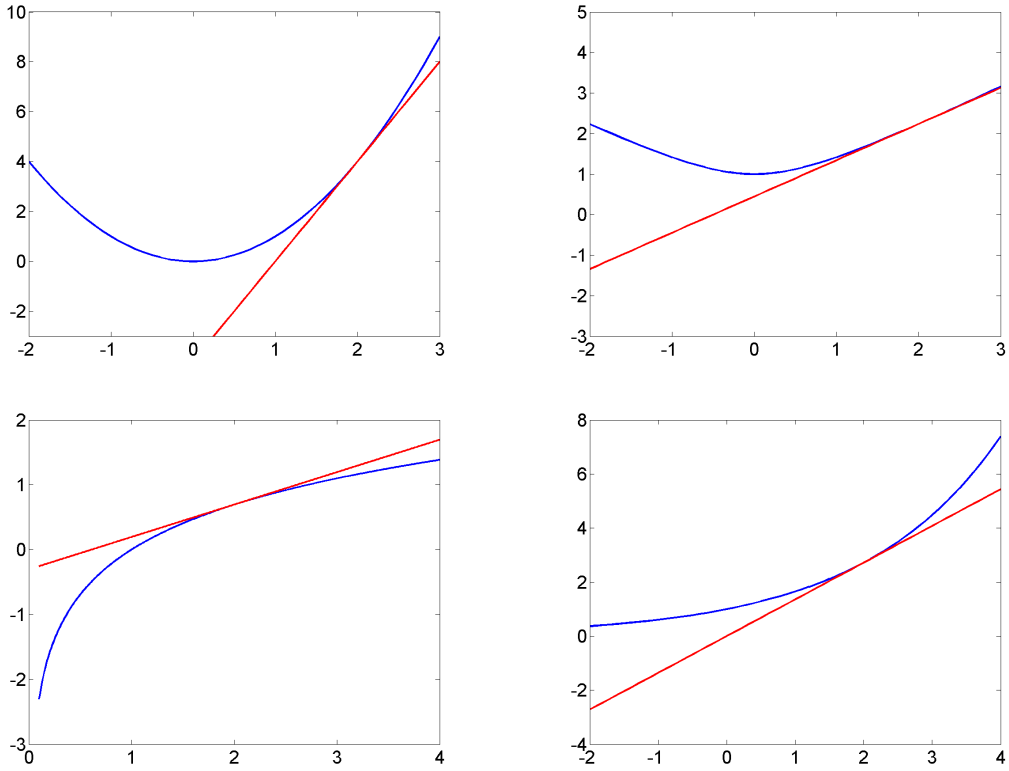
Resultatet er vist nede til venstre i figur 2.

2.1: 15 d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x/2} \\ f(2) &= e^{2/2} = e \\ f'(x) &= e^{x/2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}e^{x/2} \\ f'(2) &= \frac{e}{2} \end{aligned}$$

Tangent: $y - e = e/2 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = e/2 \cdot x$. Plottet er vist i figur **??** og laget slik:

```
x=-2:.1:4;
y=exp(x/2);
e=exp(1);
tang=e/2*x;
plot(x,y)
```



Figur 2: Plott for oppg. 2.1: 1. Den blå kurva viser $f(x)$ og den røde linja er tangenten. Skriftstørrelsen og tykkelsen på grafene er noe justert i forhold til de kommandoene som er lista opp i teksten.

```
hold on
plot(x,tang,'r')
hold off
```

Oppgave 2 – Numerisk derivasjon

a) Jeg har valgt med denne funksjonen:

$$f(x) = \sin x^2 \quad .$$

b) Vi bruker kjerneregelen når vi deriverer:

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2 \quad .$$

Jeg velger $a = 1$ og får at $f'(a) = f'(1) = 2\cos 1$.

c) Det vil være nyttig å lage ei funksjonsfil for funksjonen vår:

```
function F=FunkTilOppg2(x)

% Funksjonen f(x) = sin x^2. Funksjonen tar vektor-argument.

F=sin(x.^2);
```

Jeg har valgt å kalle denne `FunkTilOppg2.m`. Vi regner ut gjennomsnittlig vekstrate for noen verdier av h:

```
> h=1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate = -1.5983
> h=.5;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate = -0.12680
> h=.1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  0.94145
> h=.05;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0174
> h=1e-2;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0689
> h=1e-3;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0795
> h=1e-4;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0805
```

Vi minner om at piltastene kan være svært nyttige når man skal skrive den samme (lange) kommandoen flere ganger – slik som her. I følge MATLAB er $f'(1) = 2 \cdot \cos 1 \approx 1.0806$, så vi begynner å nærme oss.

d) Vi gjentar det vi nettop gjore med "bakover-formelen":

```
> h=1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  0.84147
> h=.5;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.1881
> h=.1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.1718
> h=.05;
```

```
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.1318
> h=1e-2;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.0918
> h=1e-3;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.0817
> h=1e-4;
> Rate=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-h))/h
Rate =  1.0807
```

Nok en gang ser vi at `Rate` nærmer seg $f'(1)$ når h blir liten.

e) Gjennomsnittet blir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right)=\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Altså:

$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

når h er passe liten[1]. Legg merke til at dette $f'(a)$-estimatet er helt uavhengig av $f(a)$.

f) Vi gjentar prosedyren fra c) og d) med denne nye formelen:

```
> h=1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate = -0.37840
> h=.5;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  0.53067
> h=.1;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  1.0566
> h=.05;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  1.0746
> h=1e-2;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  1.0804
> h=1e-3;
```

[1] "Passe liten" høres unektelig noe upresist ut. Det er mulig å sette opp rimelig presise kriterier for hvor liten h må være for at estimatet vårt skal ha for å ha en bestemt nøyaktighet. Dette skal vi komme tilbake til når vi har lært om Taylor-polynomer.

```
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  1.0806
> h=1e-4;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1-h))/2/h
Rate =  1.0806
```

Det ser ut til at vi nærmer oss riktig verdi for $f'(a)$ raskere på denne måten; for $h = 10^{-3}$ ser vi faktisk ikke forskjell med det antallet desimaler som blir skrevet til skjerm[2].

g) Maskinpresisjonen finner vi slik:

```
> eps
ans = 2.2204e-016
```

–altså $2.22 \cdot 10^{-16}$. Dette er jo et veldig lite tall, men det er ikke null. Vi velger noen veldig små verdier for h og beregner den deriverte med "framover-formelen":

```
> DerivFasit=2*cos(1)
DerivFasit =  1.0806
> h=1e-13;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0802
> h=1e-14;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.0769
> h=1e-15;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  1.2212
> h=5e-16;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate =  0.88818
> h=1e-16
h = 1.0000e-016
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate = 0
> h=5e-17;
> Rate=(FunkTilOppg2(1+h)-FunkTilOppg2(1))/h
Rate = 0
```

Nå ser vi faktisk at jo mindre h blir, jo *dårligere* estimat får vi for $f'(a)$. Her ser vi en vesens-forskjell mellom numeriske metoder og analytisk matematikk; matematisk skal $(f(x+h) - f(x))/h - f'(a)$ vilkårsløst nærme seg 0 når h nærmer seg 0, mens *numerisk* sett blir den deriverte best estimert med en liten – men *endeleig* – h. Dette skyldes at datamaskiner har en nedre grense for hvor små tall den klarer å håndtere.

[2]MATLAB opererer som tideligere nevnt med langt flere desimaler egentlig; om du vil ha flere desimaler skrevet til skjerm, kan du skrive '`format long`'

h) Vi kan lage en h-vektor som blir mindre og mindre ved å starte på 1 og så dele på to – igjen og igjen. Dette kan vi gjøre slik i MATLAB:

```
> hVekt=[1 .5 .5^2 .5^3 .5^4 .5^5]
hVekt =

   1.000000   0.500000   0.250000   0.125000   0.062500   0.031250
```

Dette kunne også blitt gjort litt mer effektivt:

```
> n=0:5;
> hVekt=.5.^n;
```

Vi lager vektorer som beregner $f'(a)$ ut fra de tre metodene over:

```
> DerivFram=(FunkTilOppg2(1+hVekt)-FunkTilOppg2(1))./hVekt;
> DerivBak=(FunkTilOppg2(1)-FunkTilOppg2(1-hVekt))./hVekt;
> DerivMidt=(FunkTilOppg2(1+hVekt)-FunkTilOppg2(1-hVekt))./(2*hVekt);
```

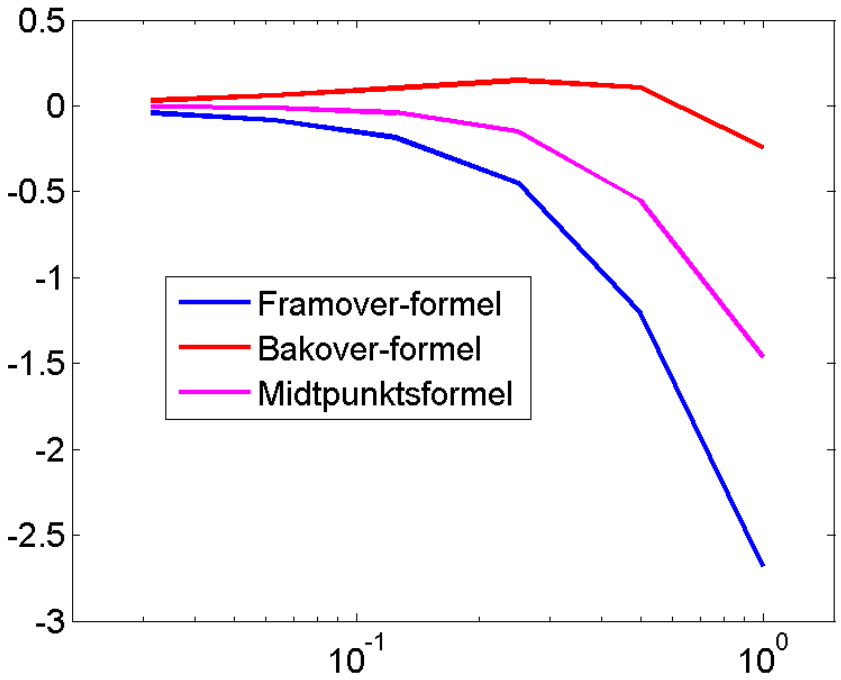
Vi plotter feilen i estimatet ved hjelp av `semilogx`-kommandoen:

```
> DerivFasit=2*cos(1)
DerivFasit =  1.0806
> semilogx(hVekt,DerivFram-DerivFasit,'b','linewidth',2)
> hold on
> semilogx(hVekt,DerivBak-DerivFasit,'r','linewidth',2)
> semilogx(hVekt,DerivMidt-DerivFasit,'m','linewidth',2)
> hold off
> legend('Framover-formel','Bakover-formel','Midtpunktsformel')
> axis([.02 1.5 -3 .5])
```

Langs y-aksen har vi her differansen mellom derivasjons-estimatet og den riktige verdien for den deriverte. Vi ser i figur 3 at alle tre metodene gir et estimat med en feil som ser ut til å gå mot 0 når h blir mindre og mindre. Men plottet for midtpunktsformelen går klart mot null raskest. (Her er det nok enklest å lese plottet fra høgre mot venstre.)

I figur 4 har vi plotta absoluttverdien av feilen i de tre ulike måtene å estimere $f'(1)$ på for et veldig stort område av h-verdier. Her er både x- og y-aksen logaritmiske. Vi ser feilen først avtar når h avtar – og at den begynner å vokse igjen når h blir ekstremt liten. Vi ser også at feilen avtar raskere for midpunktsmetoden enn for framover- og bakovermetoden. Vi ser også at feilen når en lavere verdi med midtpunktsmetoden enn med de andre formlene. Legg også merke til at grafen begynner å bli "hakketenår den numeriske feilen til datamaskina begynner å spille en rolle.

h) Vi kan for eksempel velge $g(x) = 2x^2 + x - 1$. Vi lager ei funksjonfil for denne:



Figur 3: Plott som viser feilen i ulike estimat for $f'(a)$ som funksjon av h. Plottet er *semi-logaritmisk*. Den blå kurva tilsvarer "framover-formelen", den røde tilsvarer "bakover-formelen" og den grønne er "midtpunktsformelen". Se tekst for detaljer.

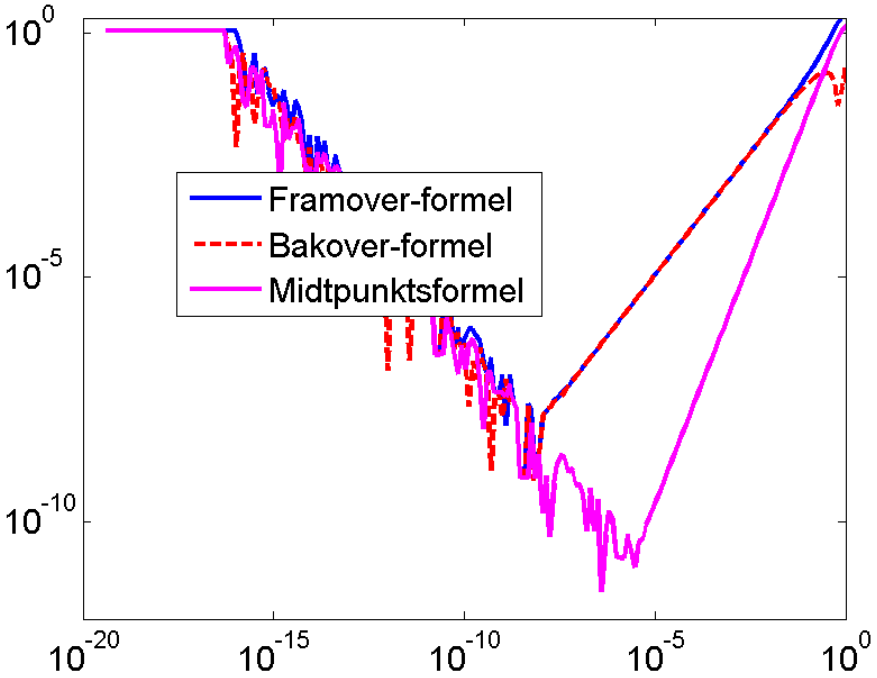
```
function G=AndreGradPol(x)

% AndreGradPol(x) gir funksjonen
% g(x) = 2x^2+x-1.
% Funksjonen tar både skalar- og
% vektorargumenter.

G=2*x.^2+x-1;
```

Vi regner noen deriverte:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x+1 \\ g'(-1) &= -4+1=-3 \\ g'(0) &= 1 \\ g'(2) &= 4\cdot 2+1=9 \quad . \end{aligned}$$

Vi estimerer disse ulike deriverte i MATLAB:

```
> a=-1;
```



Figur 4: Feilen i de ulike estimatene for $f'(a)$ for h-verdier fra 1 ned mot 10^{-20}.

```
> h=.5;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv = -3
> h=.1;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv = -3.0000
> a=0;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv =  1.0000
> h=2;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv =  1
> a=2;
> h=.5;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv =  9
> h=500;
> gDeriv=(AndreGradPol(a+h)-AndreGradPol(a-h))/(2*h)
gDeriv =  9
```

Vi ser ut til å få helt nøyaktige svar hver gang – uavhengig av vilken verdi vi velger for h. Om vi bruker midtpunktsformelen for å finne den deriverte

for en vilkårlig x, ser vi at vi faktisk får $g'(x)$ eksakt:

$$\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h} = \frac{2(x+h)^2+(x+h)-1-\big(2(x-h)^2+(x-h)-1\big)}{2h} =$$
$$\frac{2(x^2+2hx+h^2)+x+h-1-2(x^2-2hx+h^2-x+h-1)}{2h} =$$
$$\frac{2x^2-2x^2+4hx+4hx+x-x+h+h-1+1}{2h} = \frac{8hx+2h}{2h} = 4x+1 = g'(x) \quad .$$

Det er ikke så vanskelig å vise at det samme gjelder for et generelt andregradspolynom. Altså: Midtpunktsformelen er faktisk *eksakt* for andregradspolynom.

For hvilken type funksjoner er framover- eller bakoverformelen eksakt?

Oppgave 3 – Den deriverte fra en tabell

Her tar vi utgangspunkt i oppg. 2.1: 15 i læreboka.

a) Plottet kan lages slik:

```
> Aar=1900:10:2000;
> Bef=[1650 1750 1860 2070 2300 2520 3020 3700 4450 5300 6123];
> plot(Aar,Bef,'linewidth',2)
> set(gca,'fontsize',15)
> xlabel('År')
> ylabel('Befolkning [i antall millioner]')
```

og resultatet kan sees i figur 5.

b) Vi lar $B(t)$ være antall millioner mennesker i verden i år t. Om vi bruker formelen fra 2 c) kan vi for eksempel estimere B(1910) slik

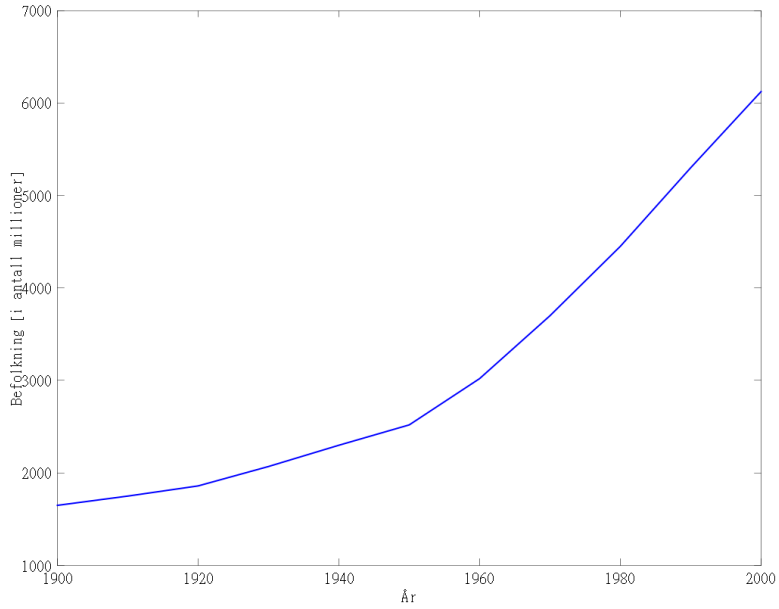
$$B'(1910) \approx \frac{B(1920)-B(1900)}{1920-10910} = \frac{B(1910+10)-B(1910-10)}{2\cdot 10} \quad .$$

Vi buker MATLAB og får:

```
> (Bef(3)-Bef(1))/(Aar(3)-Aar(1))
ans =  10.500
```

eller, for å gjøre sammenghengen med midtpunktsformelen litt tydeligere:

```
> h=Aar(2)-Aar(1);
> (Bef(3)-Bef(1))/(2*h)
ans =  10.500
```



Figur 5: Verdens befolkning i antall millioner som funksjon av årstall.

Altså, i år 1910 vokste jordas befolkning med ca 10.5 millioner mennesker per år. For de andre årene får vi $B'(1920) \approx 16$, $B'(1930) \approx 22$, $B'(1940) \approx 22.5$, $B'(1950) \approx 36$, $B'(1960) \approx 59$, $B'(1970) \approx 71.5$, $B'(1980) \approx 80$ og $B'(1990) \approx 83.65$.

c) Siden vi ikke har $B(1890)$, kan vi ikke bruke midpunktsformelen for å estimere $B'(1900)$. På samme måte er vi ute at stand til bruke midpunktsformelen for å finne $B'(2000)$ siden vi ikke har fått oppgitt $B(2010)$. Derimot kan vi bruke "framover"- og "bakover"-formlene selv om de ikke er like nøyaktige:

$$\begin{aligned} B'(1900) &\approx \frac{B(1910) - B(1900)}{1910 - 1900} = 10 \\ B'(2000) &\approx \frac{B(2000) - B(1990)}{2000 - 1990} = 82.3 \end{aligned}$$

d) Alle de estimatene vi har regna ut her, kan gjøres i "ett jafs" med dette skriptet:

```
% Vektor med årstall:
Aar=1900:10:2000;
% Vektor med befolkning:
Bef=[1650 1750 1860 2070 2300 2520 3020 3700 4450 5300 6123];
% Bestemmer lengda av Aar og tilordner dette tallet til N:
```

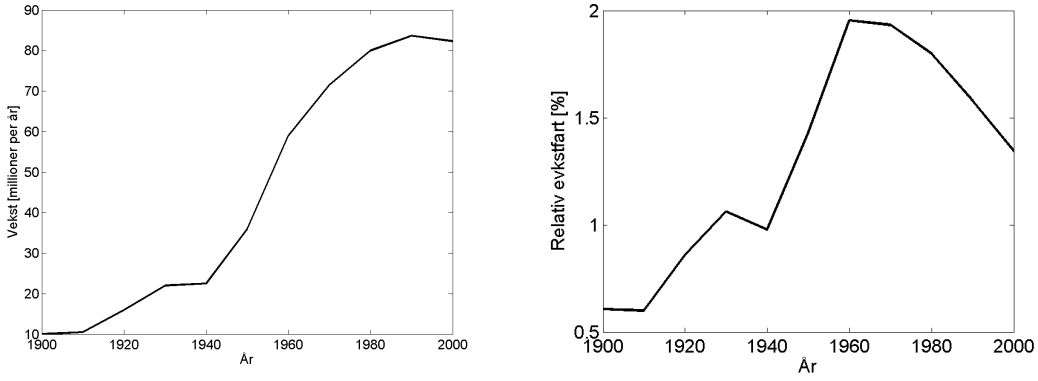
```
N=length(Aar);

for n=1:N
  if n==1                                                 % For det første punktet
    Bderiv(n)=(Bef(n+1)-Bef(n))/(Aar(n+1)-Aar(n));  % Framover-formel
  elseif n==N                                             % For det siste punktet
    Bderiv(n)=(Bef(n)-Bef(n-1))/(Aar(n)-Aar(n-1));  % Bakover-formel
  else                                                    % For alle andre punkt
    Bderiv(n)=(Bef(n+1)-Bef(n-1))/(Aar(n+1)-Aar(n-1));  % Midtpunktsformel
  end
end
% Skriver estimatene for de deriverte til skjerm:
Bderiv

% Plotter vekstfarten
figure(1)
plot(Aar,Bderiv,'k-','linewidth',2)
xlabel('Aar')
ylabel('Vekstfart [millioner per aar]')

% Plotter den relative vekstfarten
figure(2)
plot(Aar,Bderiv./Bef*100,'k-','linewidth',2)
xlabel('Aar')
ylabel('Relativ evkstfart [prosent]')
```

Vi har kalt skriptet `BefDeriv.m`. Vi kjører det i MATLAB:

```
> BefDeriv
Bderiv =

 Columns 1 through 8:

   10.000   10.500   16.000   22.000   22.500   36.000   59.000   71.500

 Columns 9 through 11:

   80.000   83.650   82.300
```

Vi får også opp plottene vist i figur 6. Som sagt, kunne dette også vært gjort uten å bruke noen `if`-sats. Linjene fra og med numme 8 til og med 16 kan erstattes med følgende:

```
% For-løkke for alle indre punkt
for n=2:(N-1)
  Bderiv(n)=(Bef(n+1)-Bef(n-1))/(Aar(n+1)-Aar(n-1));  % Midtpunktsformel
end
```



Figur 6: Tilnærma årlig *prosentvis* tilvekst i verdens befolkning som funksjon av årstall.

```
% Endepuntene:
Bderiv(1)=(Bef(2)-Bef(1))/(Aar(2)-Aar(1);
Bderiv(N)=(Bef(N)-Bef(N-1))/(Aar(N)-Aar(N-1));
```

Denne varianten er noe ryddigere siden vi ikke trenger bruke noen `if`-satser.