
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 6

Numerisk derivasjon

Stikkordet for dette oppgavesettet er numerisk derivasjon. Vi skal se at der er flere måter å regne ut deriverte på – i tillegg til de derivasjonsreglene vi kjenner fra før. Men ikke alle måtene er like gode...

Som vanlig forutsettes det at tidligere gitte oppgavesett er gjort. Hvis så ikke er tilfelle, anbefaler vi at du gjør disse andre settene først.

Oppgave 2h) er en ekstraoppgave; det er ok å hoppe over den. Men om du er nysjerrig og interessert, er det ei nyttig oppgave å gjøre.

Oppgave 1 – Funksjoner og tangenter

Ta utgangspunkt i oppgave 1 i delkapittel 2.1 i læreboka. For hver av funksjonene, lag et plott av grafen til funksjonen. Prøv estimere stigningstallet til tangenten i punktet $(2, f(2))$ og sammenlign denne med $f'(2)$. Her kan du ha nytte av å legge på et rutenett, '> grid on'. Bruke derivasjonsregler du kjenner fra før til å bestemme $f'(2)$. Tegn også inn tangenten (formel for linje gjennom (x_0, y_0) med stigningstall a : $y - y_0 = a(x - x_0)$).

Oppgave 2 – Numerisk derivasjon

- Velg deg en eller annen elementær funksjon $f(x)$. Den skal være grei å derivere, men ikke *så* grei at det bli kjedelig. Kjedelig blir det, for eksempel, om du lar f være et første- eller andregradspolynom.
- Velg deg en verdi a og regn ut $f'(a)$.
- Som kjent er den deriverte definert ved denne grenseverdien:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Med utgangspunkt i denne definisjonen, kan vi komme fram til en måte å regne ut tilnærma verdier av den deriverte på: Vi lar h være liten men endelig (til forskjell fra “*uendelig liten*”, som over):

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad .$$

Dersom h er liten nok, bør dette uttrykket gi en rimeleg god tilnærming – et godt *estimat* – for $f'(a)$.

Bruk stadig lavere verdier av h og undersøk om den tilnærma deriverte du får faktisk nærmer seg $f'(a)$. (Disse utregningene kan du gjøre veldig effektivt om du lager deg ei funksjonfil for funksjonen du valgte i deloppgave a).)

- d) Definisjonen av den deriverte sier ingenting om at h skal være positiv; vi kan også finne tilnærma deriverte ved å “gå bakover”. Dersom $h < 0$, kan vi skrive

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a-|h|) - f(a)}{-|h|} = \frac{f(a) - f(a-|h|)}{|h|} \quad .$$

Om vi lar g være absoluttverdien av h , får vi altså

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-g)}{g} \quad .$$

Bruk denne “bakover”-formelen til å finne tilnærma verdier av $f'(a)$, og undersøk om verdien nærmer seg $f'(a)$ når blir liten.

- e) Om vi tar gjennomsnittet av disse to estimatene, får vi enda en ny formel for å estimere den deriverte. Hva blir gjennomsnittet av framoverformelen $(f(a+h) - f(a))/h$ og bakoverformelen $(f(a) - f(a-h))/h$?

Denne formelen kaller vi *midpunktsformelen for numerisk derivasjon*.

- f) Bruk formelen du kom fram til i e) til å regne ut tilnærma verdier for $f'(a)$. Kan du si noe om hvilken av de tre metodene vi har sett som ser ut til å være best til å estimere $f'(a)$?
- g) Skriv ‘>eps’ i kommandovinduet i MATLAB. Dette tallet angir, som tidligere nevnt, *maskinpresisjonen* – det minste relative differansen maskina klarer å skille fra 0. Dette tallet sier altså noe om nøyaktigheten vi opererer med. Bruk formelen du kom fram til i e) til å estimere $f'(a)$ med h -verdier som er sammenlignbare med og mindre enn **eps**. Hva skjer?
- h) **Ekstra:** Lag en vektor med flere h -verdier i synkende rekkefølge. Disse kan for eksempel gå fra 1 ned mot 0. Tips: Vektoren `[1, 0.1, 0.01, 0.001]` kan lages slik: `>10.^[0:-1:-3]'`. For hver av de tre måtene å estimere $f'(a)$ på, lag en vektor med absoluttverdien av differansen mellom estimatet og den eksakte verdien av $f'(a)$ for hver verdi i h -vektoren. Plott hver av disse tre vektore mot h -vektoren. Kanskje kan det være en god idé å plote

med kommandoen `semilogx` i stedet for `plot`. Denne måten å plote på, bruker en *logaritmisk x*-akse.

Ble det tydeligere hva som gir det beste estimatet for $f'(a)$ nå?

- i) Velg deg en eller annen funksjon $g(x)$ som *er* et andregradspolynom. Bruk gjennomsnitts-formelen du kom fram til i e) til å estimere $g'(a)$ for diverse verdier av a og h . Hva skjer? Klarer du å forklare hvorfor?

Oppgave 3 – Den deriverte fra en tabell

I den forrige oppgava regna vi ut numeriske estimater for den deriverte for en funksjon som vi kjente den deriverte til eksakt. Om du synest dette kunne virke noe unødvendig, kan du nok ha rett; hva skal vi vel med estimater når vi har de eksakte verdiene? Poenget med å gjøre dette, var at det gir oss muligheten til å få en følelse av hvor gode disse numeriske estimatene er. Dette hadde vært vanskeligere å få hvis vi ikke hadde hatt “fasiten” – den eksakte deriverte.

I denne oppgava bør det nok bli litt tydeligere hva motivasjonen for å lære om numerisk derivasjon er. Vi tar utgangspunkt i oppgave 15 i delkapittel 2.1 i læreboka.

- a) Bruk tabellen til å lage et plott som viser jordens befolkning for de årene som er oppgitt.
- b) Bruk formelen fra deloppgave e) over til å estimere den deriverte av befolkningsveksten for årene 1910 – 1990.
- c) Hvorfor fungerer det dårlig å bruke denne formelen om vi skal estimere den momentane befolkningsveksten i årene 1900 og 2000? Hvilke formler kan vi bruke i stedet?
- d) Lag et skript som renger ut alle disse estimatene. Du får bruk for `for`-kommandoen. Du kan også få bruk for en `if`-sats, men det er mulig å unngå dette. I tillegg til å regne ut disse størrelsene, skal skriptet også lage et plott av den deriverte av befolkningsveksten for årene fra og med 1900 til og med 2000. Lag også et plott for den *prosentvise* veksten disse årene – altså veksten i forhold til folketallet.