

---

# Matematikk 1000

## Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 12

*Meir Eulers metode*

### Løsningsforslag

---

#### Oppgave 1 – Frå andre til fyrste orden

a)

$$y'' + y' - 2y = 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \quad .$$

Vi startar med å løyse den homogene likninga

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad .$$

Vi antar  $y = e^{rx}$  slik at  $y' = re^{rx}$  og  $y'' = r^2e^{rx}$ . Det gir den karakteristiske likninga

$$\begin{aligned} r^2 + r - 2 &= 0 \\ r &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ r = -2 \quad \text{eller} \quad r = 1 \quad . \end{aligned}$$

Generell løysing av homogen likning:

$$y_h = Ae^{-2x} + Be^x \quad .$$

Vi antar partikulær løysing av den inhomogene likninga på forma  $y_p = ax + b$ . Det gir at  $y_p = a$  og  $y_p'' \equiv 0$ . Vi set dette inn i differensiallikninga:

$$0 + a - 2(ax + b) = -2ax + a - 2b = 2x + 1 \quad .$$

Dette skal gjelde for alle  $x$ . Difor må vi ha at  $-2a = 2 \Leftrightarrow a = -1$  og  $a - 2b = 1 \Leftrightarrow b = (a - 1)/2 = -1$ , slik at

$$y_p = -x - 1 \quad .$$

Dermed blir den generelle løysinga av differensiallikninga

$$y(x) = y_h + y_p = Ae^{-2x} + Be^x - x - 1 \quad .$$

$A$  og  $B$  vert bestemt ved initialkrava:

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ Ae^0 + Be^0 - 0 - 1 &= 2 \\ A + B &= 3 \quad (\text{I}) \\ y'(0) &= -1 \\ y'(x) &= -2Ae^{-2x} + Be^x - 1 \\ -2Ae^0 + Be^0 - 1 &= -1 \\ -2A + B &= 0 \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Likn. (II) sett inn i (I) gir at  $A + 2A = 3$  slik at  $A = 1$  og  $B = 2A = 2$ .

Løysinga blir:

$$y(x) = e^{-2x} + 2e^x - x - 1 \quad .$$

b) Hvis  $u = y'$ , er  $u' = y''$ . Differensial-likninga kan difor skrivast som

$$u' + u - 2y = 2x + 1 \Leftrightarrow u' = 2y - u + 2x + 1 \quad .$$

Vi har altså desse to likningane:

$$\begin{aligned} y' &= u \\ u' &= 2y - u + 2x + 1 \quad , \end{aligned}$$

som kan skrivast som ei vektorlikning:

$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 2y - u + 2x + 1 \end{bmatrix} \quad .$$

c) Sidan  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ , må vi også ha at  $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix}$  – altså venstresida i likninga over. Høgresida kan skrivast slik

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} u \\ 2y - u + 2x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 2y - u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2x + 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2x + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dermed har vi skrive differensiallikninga på forma  $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$  – altså ei fyrste ordens differensiallikning. Prisen å betale for å redusere det til fyrste orden, er at vi no har *to* funksjonar  $u(t)$  og  $y(t)$  med differensiallikningar som er *kopla*.

Initialkravet blir

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad .$$

d) Eulers metode kan implementerast slik i MATLAB:

```
1  % Gir start og slutt for x
2  x0=0;
3  xSlutt=3;
4  % Initialverdi for y:
5  y0=[2; -1];
6
7  % Gir talet på steg
8  N=input('Gi talet paa steg: ');
9  % Steglengda
10 h=(xSlutt-x0)/N;
11
12 % Initierar vektor med x-verdiar
13 xVektor=x0:h:xSlutt;
14
15 % Initierar matrise med y- og u-verdiar. Rekke 1 er y, rekke 2 er u.
16 % Dei ulike søylene svarar til ulike tider t
17 yMatrise(1:2,1)=y0;
18 for n=1:N
19 % Tilordnar x- og y-verdiar
20   xn=xVektor(n);
21   yn=yMatrise(1:2,n);
22   yDeriv=DerivFunk(xn,yn);
23 % Finn neste y-verdi ved Eulers metode
24   yMatrise(1:2,n+1)=yn+yDeriv*h;
25 end
26
27 % Plottar løysinga
28 % Hentar ut vektor med y-verdiar (rekke 1)
29 yVektor=yMatrise(1,:);
30 hold on
31 plot(xVektor,yVektor,'m-','linewidth',2)
32 hold off
```

Legg merke til at vi her får ei “yMatrise”, til skilnad frå “yVektor” i tidlegare implementeringar. Før har yVektor vore ein vektor med  $y$ -verdiar for ulike  $x$ -verdiar. No er  $y$  ein vektor med to verdiar - ein for  $y$  (skalaren) og ein for  $u$ . Dermed vår vi ei matrise der rekke ein er  $y$  for ulike  $x$ -verdiar og rekke to er  $u$  for ulike  $x$ -verdiar.

Funksjonsfila DerivFunk.m, som gir  $F(x, y)$ , kan sjå slik ut:

```
function F=DerivFunk(x,y)

% Funksjon som gir F i differensiallikninga
% y'=F(x,y).
% Både F og y er søyle-vektorar med to komponentar.
```

```
% Hentar ut komponentane y1 og y2 i y-vektor
y1=y(1);
y2=y(2);
% Reknar ut F
F=[y2; 2*y1-y2+2*x+1];
```

Her vil variabelen  $y1$  tilsvare  $y$  og  $y2$  svarar til  $u$ .

e) Fyrst plottar vi den eksakte løysinga vi fann i deloppgåve a):

```
> x=0:1e-2:3;
> yEksakt=exp(-2*x)+2*exp(x)-x-1;
> plot(x,yEksakt,'k','linewidth',2)
```

Så køyrer vi skriptet for ulike antal steg  $N$ :

```
> EulersMetodeVektor
Gi talet paa steg: 10
> EulersMetodeVektor
Gi talet paa steg: 50
> EulersMetodeVektor
Gi talet paa steg: 100
> EulersMetodeVektor
Gi talet paa steg: 200
> EulersMetodeVektor
Gi talet paa steg: 500
```

Resultatet er vist i figur 1.

## Oppgåve 2 – Den rette svingelikninga

a) Sidan  $\varphi' = \theta''$ , får vi at

$$\varphi' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \varphi' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

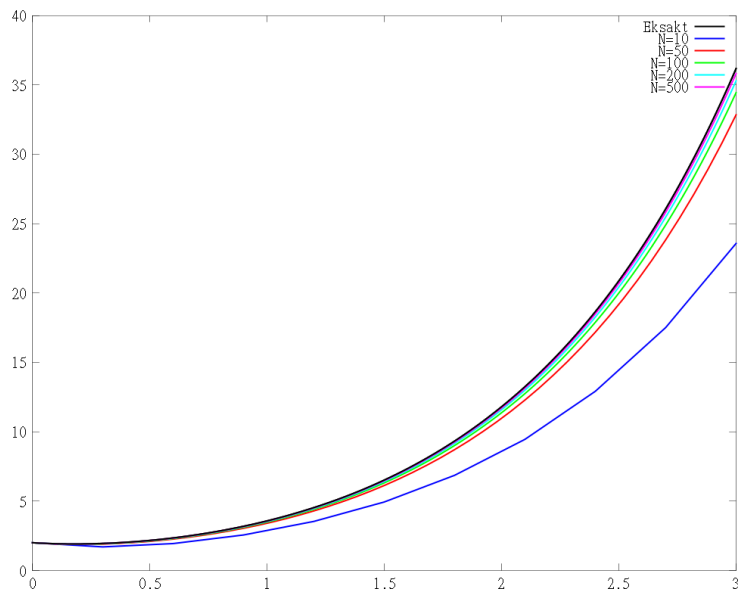
slik at

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} \quad .$$

b) Initialkrav:

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ \varphi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi implementerar dette i linje 5 i skriptet frå oppgåve 1. Vi endrar også funksjonfila `DerivFunk.m`:



Figur 1: Plott som viser korleis den numeriske løysinga nærmar seg den eksakte løysinga når vi aukar talet på steg.

```
function F=DerivFunk(x,y)

% Funksjon som gir F i differensiallikninga
%  $y'=F(x,y)$ .
% Både F og y er søyle-vektorar med to komponentar.

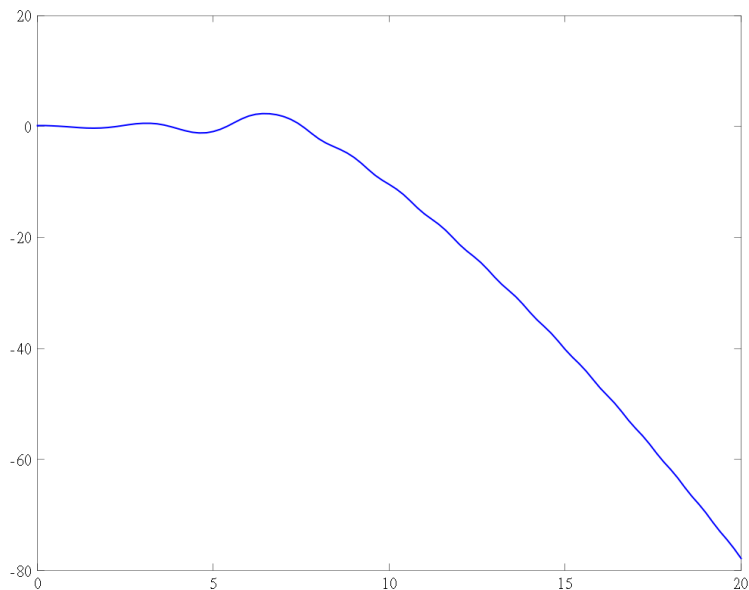
% Hentar ut komponentane y1 og y2 i y-vektor
y1=y(1);
y2=y(2);
% Tilordnar tyngdeakslelerasjon og snorlengda
g=10;
l=2;
% Reknar ut F
F=[y2; -g/l*sin(y1)];
```

I tillegg lar vi  $t$  ("x") gå til 20 ved å justere linje 3:

```
xSlutt=20;
```

Når vi køyrer dette skriptet, får vi til fulle sjå problema med Eulers framover-metode. I figur 2 ser vi kva som skjer når vi set  $N = 100$ . Det går gale nesten med ein gong. Det som skjer, er at for kvart steg vert estimatet litt feil. Den totale feilen blir større og større for kvart steg –

metoden samlar opp feil heile tida. Etterkvart er den samla feilen så stor at den dominerar fullstendig.

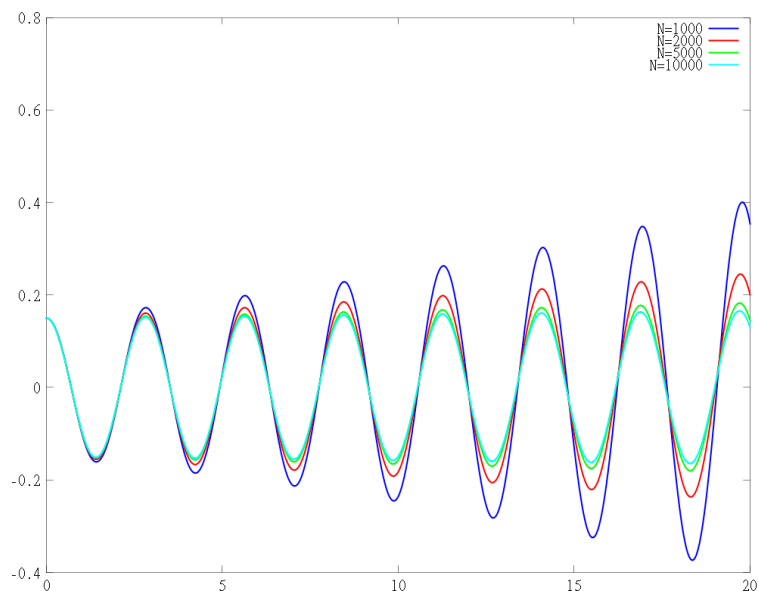


Figur 2: Dette er eit forsøk på løyse svingelikninga numerisk med Eulers framover-metode med 100 steg.

Figur 3 viser numeriske “løysingar” for stadig større  $N$ -verdiar. Vi ser at sjølv med ganske høge  $N$ -verdiar har vi store problem med å hindre at amplituden i svingingane aukar. Dette kan jo umogeleg vere rett om likninga vi snakkar om skal ha noko som helst med ein svingande pendel å gjere. Retnok blir problemet mindre og mindre etterkvart som  $N$  aukar. Men når vi må operere med  $N$ -verdien av storleiksorden 10000, er ikkje dette noko særleg bra.

Vi prøver midtpunkts-metoden i staden. Den implementerar vi ganske enkelt ved å erstatte `for`-løkka i “framover-skriptet” med denne:

```
for n=1:N
% Tilordnar x- og y-verdiar
  xn=xVektor(n);
  xnHatt=xn+h/2;
  yn=yMatrise(1:2,n);
  ynHatt=yn+DerivFunk(xn,yn)*h/2;
  yDeriv=DerivFunk(xnHatt,ynHatt);
% Finn neste y-verdi ved Eulers metode
  yMatrise(1:2,n+1)=yn+yDeriv*h;
end
```



Figur 3: Her har vi forsøkt å få det numeriske estimatet til å bli uavhengig av steglengda. Vi har ikkje lukkast.

Figur 4 viser eit plott som svarar til figur 3 – berre for midtpunktsmetoden denne gongen. Vi ser at no gå det langt betre. Legg også merke til at vi snakkar om heilt andre  $N$ -verdiar i denne figuren enn i figur 3. Som vi ser, har vi store problem med å sjå skilnad på den grønne grafen ( $N = 400$ ) og den svarte ( $N = 800$ ).

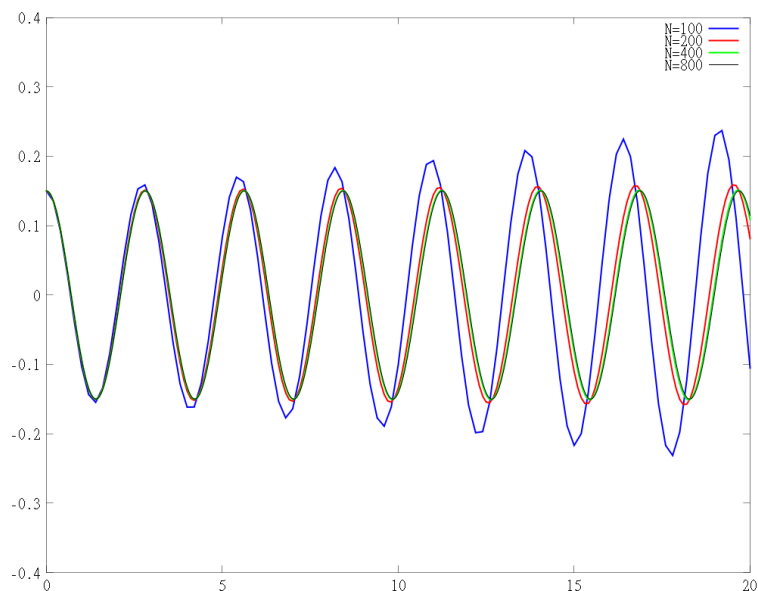
- c) Når vi tilnærmar  $\sin \theta$  med  $\theta$  for å gjere differensiallikninga enklare, får vi løysinga

$$\theta_{\text{lin}} = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad .$$

Her har vi sett inn initialkrava  $\theta_{\text{lin}}(0) = \theta_0$  og  $\theta'_{\text{lin}}(0) = 0$ .

Vi set  $N = 1000$  (strengt tatt litt større enn nødvendig), brukar midtpunktsmetoden og samanliknar den numeriske løysinga med den analytiske tilnærminga  $\theta_{\text{lin}}$ . I kommandovindauga kan det gjerast slik:

```
> t=0:1e-2:20;
> g=10;
> l=2;
> theta0=.15;
> thetaLin=theta0*cos(sqrt(g/l)*t);
> plot(t,thetaLin,'b','linewidth',3)
> EulersMidtpunktsMetodeVektor
Gi talet paa steg: 1000
```



Figur 4: Her ser vi korleis det går med midtpunktsmetoden: Langt betre.

Skriptet som implementerar midtpunktsmetoden, heiter

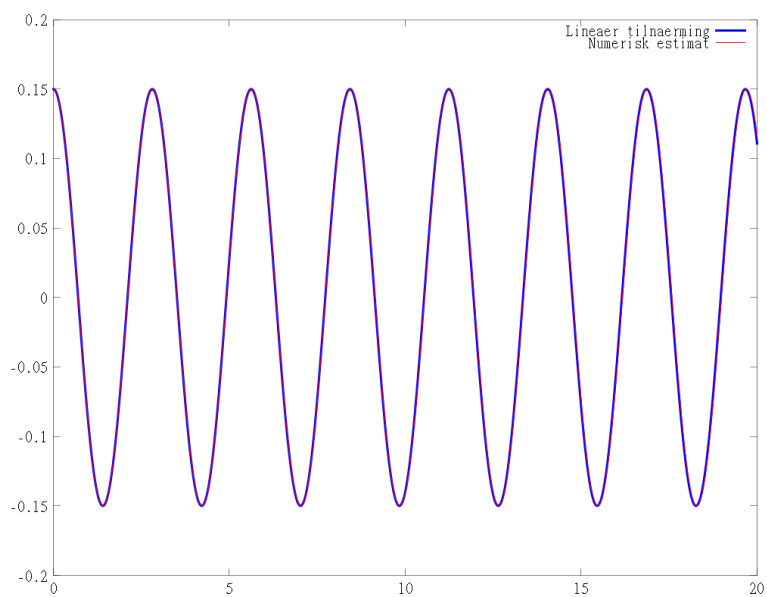
**EulersMidpunktsMetodeVektor.m**. Resultatet er vist i figur 5. På denne tidsskalaen er det svært vanskeleg å sjå skilnad på dei to grafane. Då var vel tinærminga ok, då.

d) Vi endrar initialkravet i linje 5:

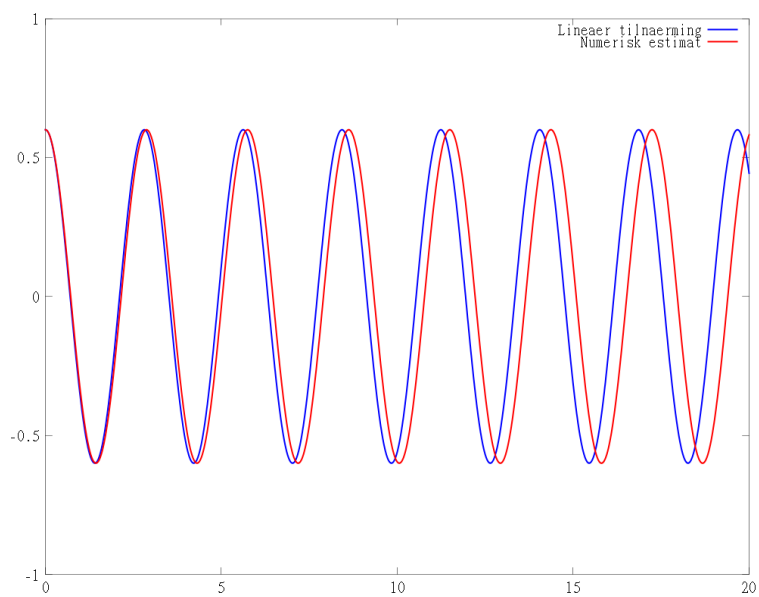
```
y0=[0.6; 0];
```

Vi kan ikkje ta for gitt at ein  $N$ -verdi som var høg nok i c) framleis er høg nok nok vi endrar intialkravet. Men om vi sjekkar, viser det seg at  $N = 1000$  er rikeleg høgt nok også for  $\theta_0 = 0.6$  rad. Vi plottar  $\theta_{\text{lin}}$  og tinærminga frå Eulers midtpunktsmetode saman – akkurat på same måte som i c). Resultatet er vist i figur 6. Denne gongen ser vi at alt for  $t \geq 5$  at dei to grafane er ganske ulike – og at skilnaden blir større og større.

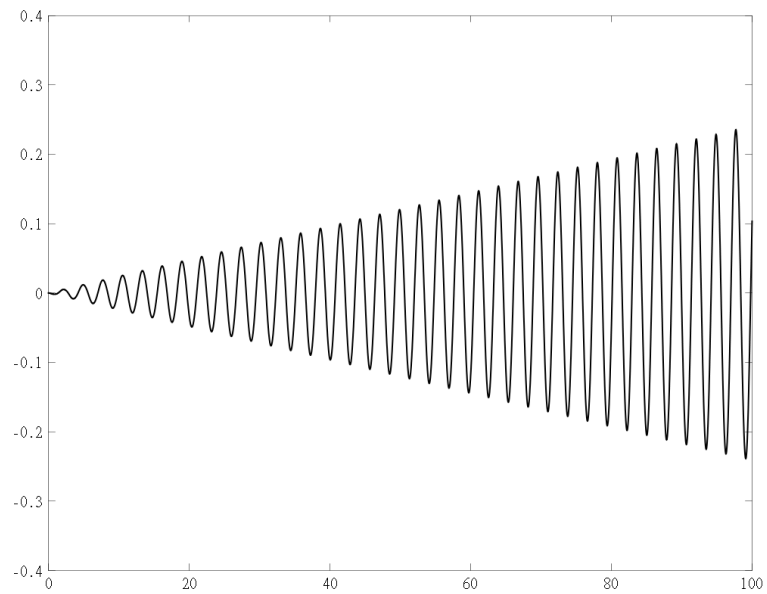
Det enkle svaret på at vi fekk samsvar i c) men ikkje i d) er at tilnærminga  $\sin \theta_0 = \theta_0$  var ok for  $\theta_0 = 0.15$  men ikkje for  $\theta_0 = 0.6$ . Men dette blir for enkelt. Om vi ser på lange tider, vil den faktiske løysinga av svingelikninga og tilnærmina  $\theta_{\text{lin}}$  bli ulike etterkvart. Dette er illustrert i figur 7. Her har vi plotta differansen mellom ei konvergent numerisk løysing og  $\theta_{\text{lin}}$  og delt differansen på amplituden  $\theta_0$ . Denne differansen har vi plotta frå 0 til 100. Vi ser at avviket blir større og større.



Figur 5: Samanlikning mellom numerisk løysing av svingelikninga og analytisk løysing av den differensiallikninga vi får ved å gjere tinærminga  $\sin \theta \approx \theta$ .



Figur 6: Figuren viser det same som figur 5 – bortsett frå at her er  $\theta(0) = 0.6$  i staden for 0.15.



Figur 7: Figuren viser differansen mellom ei konvergent numerisk løysing av svingelikninga og funksjonen  $\theta_{\text{lin}}$ , som er basert på ei lineær tilnærming til  $\sin \theta$ . Differansen er delt på amplituden  $\theta_0 = 0.15$ , som er gitt ved initialkravet.