
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 12

Meir Eulers metode

I dette oppgavesettet skal vi lære oss å løyse 2. ordens differensiallikningar ved hjelp av Eulers metode. Som vi veit, er Eulers metode noko vi brukar for å løyse fyrste ordens differensiallikningar numerisk. Men ved hjelp av eit lite triks, skal vi sjå at 2. ordens differensiallikningar kan skrivast som eit kopla sett av fyrste ordens differensiallikningar.

Innhaldet i dette numerikk-settet er ikkje pensum.

Oppgåve 1 – Frå andre til fyrste orden

- a) Løys følgande initialverdiproblem med papir og blyant:

$$y'' + y' - 2y = 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \quad .$$

- b) Vis at om vi definerar variabelen u slik: $u = y'$, kan vi skrive differensiallikninga over som

$$\begin{bmatrix} y' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -u + 2y + 2x + 1 \end{bmatrix}$$

- c) Eulers metode brukar vi på differensiallikningar som kan skrivast som $y' = F(x, y)$. Lat vektoren $\mathbf{y}$ vere

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad .$$

Forklar kvifor uttrykket over har denne forma – om vil godtar at y og F får vere vektorar; $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y})$.

Kva blir initialkravet på vektor-form?

- d) Implementér Eulers metode for differensiallikninga i b) med initialkravet i c). Ta gjerne utgangspunkt i ei eller anna implementering du har brukt tidelegare.

- e) Lag plott av løysinga frå a) saman med den y (skalaren y , ikkje vektoren) du fann frå løysinga frå d). Plott den numeriske løysinga for ulike antal steg (“ N ”).

Oppgåve 2 – Den rette svingelikninga

Svingelikninga ser slik ut:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad .$$

Denne skildrar vinkelen ein svingande pendel dannar. Her er θ vinkelen mellom snora og vertikal-aksen (i radianar), g tyngdelakselerasjonen, t er tida og l er lengda av snora.

Det er vanleg å tilnærme $\sin \theta$ med berre θ . $P_2(\theta) = \theta$ er fyrste – og andre – ordens Taylor polynom omkring $a = 0$ for $f(\theta) = \sin \theta$. Så dette verkar jo rimeleg så lenge θ er liten i absoluttverdi – og gitt i radianar.

I denne oppgåva skal vi undersøke numerisk i kor stor grad denne tilnærminga faktisk *er* ok.

- a) Innfør variabelen $\varphi = \theta'$. Den greske bostaven φ tilsvavar vår “f”. Vi uttalar namnet som “fi”. Vis at vi kan skrive svingelikninga som

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} \quad .$$

- b) Forsøk å bruke Eulers framover-metode ei numerisk løysing av likninga over med initialkrava $\theta(0) = \theta_0 = 0.15$ rad, $\theta'(0) = 0$. Bruk $g = 10$ m/s² og $l = 2$ m. Implementér også midtpunkt-metoden og samanlikne metodane.
- c) Plott den konvergente numeriske løysinga di frå b) saman med den analytiske løysinga av svingelikninga, med same initialkrav, som vi får når vi gjer tilnærminga $\sin \theta \approx \theta$. Kor lenge er løysingane meir eller mindre like?
- d) Gjer det same som over med $\theta_0 = 0.6$ rad $\approx 34^\circ$. Kor lenge er løysingane meir eller mindre like no?