
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 11

Eulers metode

I dette oppgavesettet skal vi lære oss å implementere Eulers metode. Dette er en metode for å løse differensiallikninger av typen $y' = F(x, y)$ for et gitt initialkrav; $y(x_0) = y_0$. Dette generelle uttrykket tilsvarer en ganske stor klasse av problemer, så metoden er rimeleg kraftig. Så er da også metoder av denne typen veldig mye brukt – både innenfor teknologi, industri og forskning. Men den enkleste versjonen av Eulers metode blir neste aldri brukt. Når vi tar den med her, er det mest fordi den illustrerer veldig tydelig prinsippet som ligger til grunn for numerisk løsning av differensiallikninger. Men med små justeringer kan metoden gjøres langt bedre. Vi skal se på én måte å forbedre Eulers metode på.

Oppgave 1 – Sammenlikning med analytisk løsning

I denne oppgava skal vi konsentrere oss om følgende initialverdiproblem:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}y, \quad y(0) = 1 \quad .$$

a) Vis at

$$y = e^{x^{3/2}}$$

er riktig løsning av dette initialverdiproblemet. Lag et plott av løsninga for $x \in [0, 2]$.

b) Forklar hvorfor Taylor-polynomet til $y(x)$ av 1. orden kan skrives som

$$P_1(x) = y(a) + \frac{3}{2}\sqrt{a}y(a)(x - a) \quad .$$

Hvordan ser dette polynomet ut om vi setter $a = x_n$ og $x = x_n + h$?

- c) Vi definerer ei tallfølge $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ rekursivt¹ slik:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{3}{2}\sqrt{x_n} y_n h \quad \text{der} \quad x_n = nh \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

Er det rimelig å gå ut fra at $y_n \approx y(x_n)$? Hva skal til for at dette er ei god tilnærming?

- d) Del intervallet $[0, 2]$ inn i $N = 10$ deler – hver med lengde $h = (2 - 0)/N$. Du får da $(N + 1)$ x -verdier: $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_N = 2$. Ut fra formelen over kan vi finne et tilsvarende sett med y_n -verdier. Lag et skript som lager en vektor med disse x -verdiene og en annen vektor med y -verdiene. Forsøk å lage skriptet slik at man lett kan endre N .
- e) Plott x - og y -vektorene du fant over sammen med den eksakte løsningen av initialverdi-problemet. Likner grafene?
- f) Gjør det same som over for $N = 50, N = 100$ og $N = 500$. Ble samsvaret bedre nå? Hvor høy N må du ha for å kunne si at grafene er mer eller mindre like? Er feilen systematisk, blir feilen større og større når x øker, eller varierer den?
- g) Det vi nå har implementert, er *Eulers metode* – eller mer spesifikt: Eulers *framover*-metode. For det mer generelle initialverdi-problemet $y' = F(x, y)$ med $y(x_0) = y_0$ kan formelen tilsvarende likning 1 skrives slik:

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h \quad \text{der} \quad x_n = x_0 + nh \quad . \quad (2)$$

Som vi har sett, tar denne formelen utgangspunkt i Taylor-polynomet av første grad i punktet (x_n, y_n) for å finne punktet (x_{n+1}, y_{n+1}) . Grafen mellom punkta er tangenten i punktet (x_n, y_n) . Men vi kan like godt ta utgangspunkt i tangenten i punktet (x_{n+1}, y_{n+1}) . Om vi tenker slik, får vi denne formelen:

$$y_{n+1} = y_n + F(x_{n+1}, y_{n+1})h \quad \text{der} \quad x_n = x_0 + nh \quad . \quad (3)$$

Dette er Eulers *bakover*-metode. Siden y_{n+1} står både på høyre og venstre side av likninga, må man løse denne likninga for å finne y_{n+1} . Vis at om vi gjør dette for vårt problem, får vi denne formelen:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \frac{3}{2}\sqrt{n+1} h^{3/2}} \quad .$$

Merk at å løse likning 3 for y_{n+1} slett ikke alltid lar seg gjøre.

- h) Implementér denne metoden, og plott den numeriske løsningen sammen med den eksakte for $N = 10, N = 50$ og $N = 100$. Du trenger bare endre éi linje i koden du laget tidligere. Det kan bli nødvendig å “slette” variable

¹ *Rekursivt* betyr at du trenger tidligere ledd for å finne det neste; vi har ingen formel som gir y_n direkte.

når du skal plotte på nytt igjen med færre punkter enn forrige gang. Dette kan du gjøre med kommandoen ‘`clear all`’.

Er feilen systematisk? Er den eventuelt systematisk på samme måte som med framover-metoden? Hvor stor må N vere for at den numeriske løsninga skal bli mer eller mindre lik den eksakte?

- i) Vi har tidligere sett to eksempler på at *midpunkt* gir bedre numeriske estimater enn “ensidige” metoder. (Hvilke eksempler er dette?) Eulers metode er ikke noe unntak i denne sammenhengen. Eulers *midpunktmetode* er slik²:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + F(\hat{x}_n, \hat{y}_n)h \quad \text{der} \\ \hat{x}_n &= x_n + h/2 \quad \text{og} \quad \hat{y}_n = y_n + F(x_n, y_n)h/2 \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Nok en gang: Implementèr denne metoden og plott den numeriske løsninga for $N = 10$, $N = 50$ og $N = 100$. Er denne metoden bedre enn framover- og bakover-metodene for dette problemet? Hvor stor N trenger vi for å få et noenlunde nøyaktig svar denne gongen?

Oppgave 2 – Uten “fasit”

I forrige eksempel var vi så heldige at vi hadde ei analytisk løsning av initialverdi-problemet. Slik er det slett ikke alltid – akkurat som med antiderivasjon. Når vi ikke har et eksakt svar å sammenligne med, blir det desto viktigere å kontrollere at resultatet *ikke* er avhengig av hvilken verdi vi setter på h (eller N). Derfor er vi nødt for å gjenta den numeriske utrekninga med stadig høyere N -verdier – helt til vi ikke lenger ser noen endring i resultatet.

I denne oppgava skal vi gjøre nettopp dette. Undersøk hvor stor N du trenger for å få ei løsning av disse initialverdi-problemene på de gitte intervallene som ikke avhenger av vårt valg av N . Gjør dette ved å bruke framovermetoden – og gjerne også midpunktmetoden.

a)

$$y' = \sin(x + y^2), \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 5] \quad .$$

b)

$$y' + x^2 \cos(x/2) = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 4] \quad .$$

²Man kunne selvsagt laget en midpunktmetode ved å bruke gjennomsnittet av framover- og bakovermetoden, $y_{n+1} = y_n + (F(x_n, y_n) + F(x_{n+1}, y_{n+1}))/2 \cdot h$. Problemet med denne er at den er *implisitt*, det lar seg ikke nødvendigvis gjøre å få y_{n+1} alene på éi side av likninga.

Ekstra: Oppgave 3 – Et konvergensbevis

I denne oppgava skal du ikke bruke MATLAB i det hele tatt. Vi tar her utgangspunkt i dette initialverdiproblemet:

$$y' = y, \quad y(0) = y_0 \quad .$$

Du kan få bruk for følgende grenseverdier:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e \quad .$$

- a) Vis at $y = y_0 e^x$ er riktig løsning av initialverdiproblemet. Hva blir $y(1)$?
- b) Vis at Eulers framover-metode gir at $y_n = y_0(1 + h)^n$.
- c) Med $h = 1/N$, vis at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = y_0 e \quad .$$

- d) Vis at grenseverdien over stemmer om y_N blir regna ut med bakover-metoden også.