
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 10

Løsningsforslag

Gitt transformasjon:

$$D : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad D(\mathbf{f}) = A\mathbf{f} \quad \text{med}$$
$$A = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

- a) Alle transformasjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ på forma $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der A er ei matrise, er lineære. (Se s. 39 i læreboka “Linear Algebra and Its Applications”.)
- b) Vi regner ut:

$$D(\mathbf{f}) = A\mathbf{f} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -2f(x_1) + 2f(x_2) \\ -f(x_1) + f(x_3) \\ -f(x_2) + f(x_4) \\ -f(x_3) + f(x_5) \\ -2f(x_4) + 2f(x_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} \\ \frac{f(x_3)-f(x_1)}{2h} \\ \frac{f(x_4)-f(x_2)}{2h} \\ \frac{f(x_5)-f(x_3)}{2h} \\ \frac{f(x_5)-f(x_4)}{h} \end{bmatrix} .$$

Om vi tar en titt på den nevnte oppgavesettet, kjenner vi raskt igjen dette som *numerisk derivasjon*. 2.- til og med 4.-komponentene er regna ut ved *midpunktsformelen*:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{2h} .$$

I endepunktene har vi brukt de litt “simplere” framover- og bakoverformlene

$$\begin{aligned} f'(x_1) &\approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} \quad \text{og} \\ f'(x_5) &\approx \frac{f(x_5) - f(x_4)}{h} \quad . \end{aligned}$$

- c) Denne forbedringen gjelder det siste og det føreste elementet i vektoren $D(\mathbf{f})$. Følgelig må vi endre den første og den siste raden i A ; rad 2 til og med 4 forblir uendra. Om vi lar matrisa B se slik ut:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} \quad ,$$

vil den første komponenten i vektoren vi får når vi regner ut produktet $B\mathbf{f}$ se slik ut:

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3) + a_4 f(x_4) + a_5 f(x_5) \quad .$$

Dette skal, i følge den gitte formelen, være lik

$$\frac{-3f(x_1) + 4f(x_1 + h) - f(x_1 + 2h)}{2h} = \frac{1}{2h} (-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)) \quad .$$

Om vi sammenligner disse uttrykkene, finner vi at $a_1 = -3/(2h)$, $a_2 = 4/(2h)$, $a_3 = -1/(2h)$ og $a_4 = a_5 = 0$.

For den siste komponenten får vi, på samme måte at

$$b_1 f(x_1) + b_2 f(x_2) + b_3 f(x_3) + b_4 f(x_4) + b_5 f(x_5) = \frac{1}{2h} (f(x_3) - 4f(x_4) + 3f(x_5)) \quad ,$$

slik at $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = 1/(2h)$, $b_4 = -4/(2h)$ og $b_5 = 3/(2h)$. Dermed har vi bestemt B -matrisa:

$$B = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

- d) Vi har

$$f(x) = \sin(2x + 1) \quad ,$$

og velger $x_1 = 0$, slik at $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.75$ og $x_5 = 1$.

Det gir følgende:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \cos(2x + 1) \\
f'(x_1) &= 1.081 \\
f'(x_2) &= 0.141 \\
f'(x_3) &= -0.832 \\
f'(x_4) &= -1.602 \\
f'(x_5) &= -1.980
\end{aligned}$$

I kommandovinduet i MATLAB kan dette effektivt regnes ut slik:

```

> x=0:.25:1;
> fd=2*cos(2*x+1)
fd =

    1.08060    0.14147   -0.83229   -1.60229   -1.97998

```

Med en bestemt $f(x)$ får vi også bestemt vektoren $\mathbf{f}$ over. Vi tilordner matrisene A og B i kommandovinduet og regner ut $D(\mathbf{f})$ og $E(\mathbf{f})$. Utregningene, sammen med noen kommentarer er vist her:

```

> h=.25;           % Tilordner h
> x=0:h:1;         % Tilordner x-vektoren
> f=sin(2*x+1)     % Tilordner f-vektoren
f =

    0.84147    0.99749    0.90930    0.59847    0.14112

> f=f.'           % Gjør f-vektor om til en søylevektor
f =

    0.84147
    0.99749
    0.90930
    0.59847
    0.14112

> A=1/(2*h)*[-2 2 0 0 0      % Tilordner A-matrisa
> -1 0 1 0 0
> 0 -1 0 1 0
> 0 0 -1 0 1
> 0 0 0 -2 2]
A =

    -4     4     0     0     0
    -2     0     2     0     0

```

```

0  -2  0  2  0
0  0  -2  0  2
0  0  0  -4  4

```

```

> B=1/(2*h)*[-3 4 -1 0 0      % Tilordner B-matrisa
> -1 0 1 0 0
> 0 -1 0 1 0
> 0 0 -1 0 1
> 0 0 1 -4 3]

```

```
B =
```

```

-6  8  -2  0  0
-2  0  2  0  0
0  -2  0  2  0
0  0  -2  0  2
0  0  2  -8  6

```

```

> A*f      % Regner ut D(f) = A f
ans =

```

```

0.62410
0.13565
-0.79805
-1.53635
-1.82941

```

```

> B*f      % Regner ut E(f) = B f
ans =

```

```

1.11254
0.13565
-0.79805
-1.53635
-2.12246

```

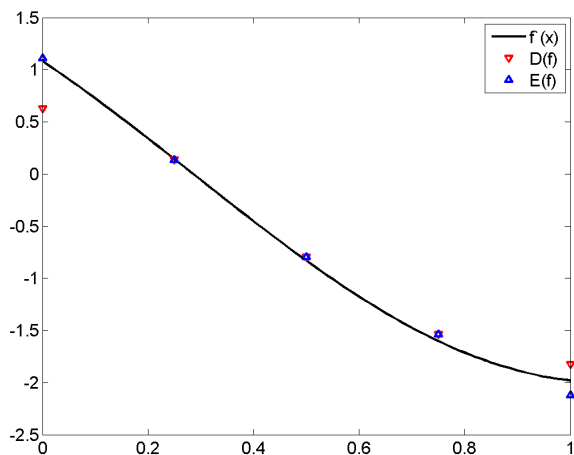
Vi finner altså følgende

$$D(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 0.624 \\ 0.136 \\ -0.798 \\ -1.536 \\ -1.829 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad E(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1.113 \\ 0.136 \\ -0.798 \\ -1.536 \\ -2.122 \end{bmatrix}$$

og minner om at

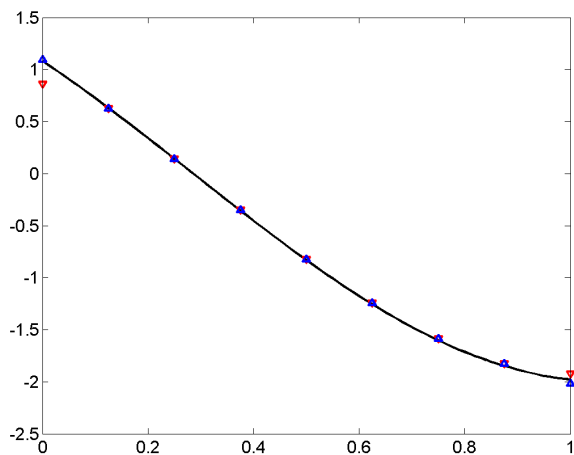
$$\begin{bmatrix} f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ f'(x_3) \\ f'(x_4) \\ f'(x_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.081 \\ 0.141 \\ -0.832 \\ -1.602 \\ -1.980 \end{bmatrix} .$$

Vi ser at estimatene for de deriverte stort sett er i nærheten, men ingen er helt nøyaktige. Spesielt ser vi at E estimerer $f'(x_1)$ og $f'(x_5)$ bedre enn D . I figur 1 er $f'(x)$ plotta sammen med estimatene vi fant. Om vi



Figur 1: Figuren viser $f'(x)$ sammen med estimatene vi har funnet.

bruker en mindre h -verdi – og dermed flere punkter, får vi bedre samsvar. Dette er illustrert i figur 2, som viser det samme som figur 1 – men med $h = 0.125$.



Figur 2: Det samme som figur 1, men med $h = 0.125$. (Dei tilsvarande transformasjonane har no $\mathbb{R}^9$ som fra- og tilrom, og matrisense som tilsvarar A og B har formatet 9×9 .) Som vi ser, er samsvaret langt bedre enn det vi så i figur 2.

e) Om $E(\mathbf{f})$ regner estimat for $f'(x)$, vil $E(E(\mathbf{f}))$ gi estimat for det vi får når

vi deriverer f to ganger – altså $f''(x)$. Vi regner ut “fasiten” først:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \sin(2x + 1) \\ f''(x_1) &= -3.366 \\ f''(x_2) &= -3.990 \\ f''(x_3) &= -3.637 \\ f''(x_4) &= -2.394 \\ f''(x_5) &= -0.564 \end{aligned}$$

Så $E(E(\mathbf{f})) = BB\mathbf{f} = B^2\mathbf{f}$:

```
> B*B*f
ans =
```

```
-3.9939
-3.8212
-3.3440
-2.6488
-2.0400
```

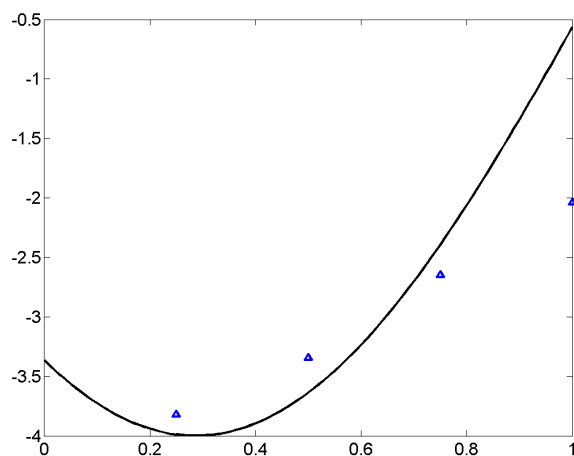
altså:

$$E(E(\mathbf{f})) = \begin{bmatrix} -3.994 \\ -3.821 \\ -3.344 \\ -2.649 \\ -2.040 \end{bmatrix}$$

Her kunne samsvaret har vært bedre – spesielt i endepunktene. Dette blir enda tydeligere om vi ser på figur 3. Heldigvis finst det bedre måter å estimere dobbelt-deriverte på.

- f) Om vi går tilbake til skrivemåten i starten av oppgava, kan vi regne ut $T(\mathbf{f})$ for ein generell f :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{f}) &= M\mathbf{f} = h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ h(f(x_1)/2 + f(x_2)/2) \\ h(f(x_1)/2 + f(x_2) + f(x_3)/2) \\ h(f(x_1)/2 + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)/2) \\ h(f(x_1)/2 + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)/2) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$



Figur 3: Figuren viser $f''(x)$ sammen med estimatene vi har funnet ved å utføre transformasjonen E to ganger på $\mathbf{f}$. Samsvaret er ikke imponerende...

Vi kjenner dette igjen som *trapes-metoden* for numerisk integrasjon:

$$T(\mathbf{f}) \approx \begin{bmatrix} \int_{x_1}^{x_1} f(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_4} f(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_5} f(x) dx \end{bmatrix}.$$

Som før regner vi ut “fasit” og estimat for vår av $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C \\ \int_{x_1}^{x_1} f(x) dx &= 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x + 1) \right]_0^{0.25} = 0.235 \\ \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx &= 0.478 \\ \int_{x_1}^{x_4} f(x) dx &= 0.671 \\ \int_{x_1}^{x_5} f(x) dx &= 0.765 \end{aligned}$$

Så estimatene:

```
> h=.25;
> x=0:h:1;
```

```

> f=sin(2*x+1).'
f =

    0.84147
    0.99749
    0.90930
    0.59847
    0.14112

> M=h*[0 0 0 0 0
> .5 .5 0 0 0
> .5 1 .5 0 0
> .5 1 1 .5 0
> .5 1 1 1 .5]
M =

    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.12500    0.12500    0.00000    0.00000    0.00000
    0.12500    0.25000    0.12500    0.00000    0.00000
    0.12500    0.25000    0.25000    0.12500    0.00000
    0.12500    0.25000    0.25000    0.25000    0.12500

> M*f
ans =

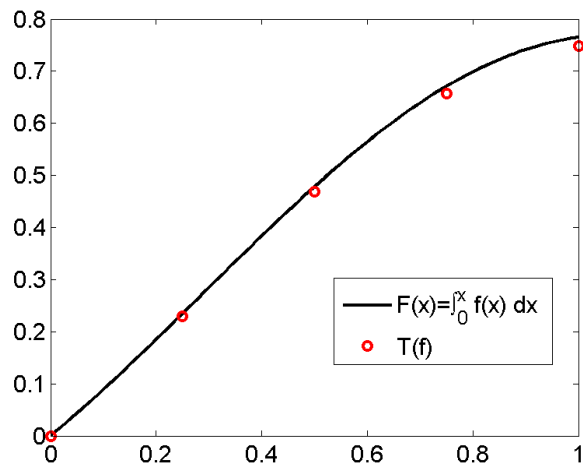
    0.00000
    0.22987
    0.46822
    0.65669
    0.74914

```

Altså:

$$T(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.230 \\ 0.468 \\ 0.657 \\ 0.749 \end{bmatrix} .$$

Dette var vel OK samsvar, var det ikke? I Figur 4 har vi plotta estimatend våre sammen med $\int_0^x f(t) dt$.



Figur 4: Sammelikning mellom den kontinuerte funksjonen $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, som er en antiderivert til $f(x)$, og estimatene vi regna ut basert på transformasjonen $T(f)$.