
Matematikk 1000

Øvingsoppgaver i numerikk – leksjon 10

Numerisk derivasjon som lineær transformasjon

I dette settet skal vi fortsette å jobbe med lineære transformasjoner og matriser. Forhåpentligvis vil du finne at dette har en viss relevans til ting vi har jobba med tideligere

La oss tenke oss at vi har tabellert 5 punkter for en eller annen funksjon $f(x)$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

hvor alle “nabo- x -ene” har samme avstand; $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = h$. Vi lar vektoren $\mathbf{f}$ være en søylevektor med funksjonsverdiene som elementer:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{bmatrix} .$$

La transformasjonen $D : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ være gitt ved at $D(\mathbf{f}) = A\mathbf{f}$ der matrisa

$$A = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

- Hvorfor er D opplagt en lineær transformasjon?
- Med papir og blyant: Rengn ut hva $D(\mathbf{f})$ blir. Hva er det denne transformasjonen *gjør* med f ? (Hint: Se numerikk-leksjon 6.)

- c) Vi har tidligere sett at midpunktsformelen for numerisk derivasjon,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad ,$$

gir mye bedre estimerer enn de litt mer “naive” formlene

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{og} \quad f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad .$$

Men midpunktsformelen kan ikke brukes i endepunkter. Derimot kan vi bruke disse formlene:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \\ f'(x) &\approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h} \end{aligned}$$

Man kan vise at disse har samme type nøyaktighet som midpunktsformelen. Bruk dette til å lage en ny transformasjon E , gitt ved ei ny standardmatrise B , som estimerer $f'(x)$ bedre enn D .

- d) La nå $f(x)$ være gitt slik:

$$f(x) = \sin(2x + 1) \quad ,$$

og velg 5 x -verdier slik at $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = h = 0.25$.

Bestem $f'(x)$ og regn ut $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, etc., og sammenlign med det du får når du regner ut $D(\mathbf{f})$ og $E(\mathbf{f})$.

- e) Om du utfører transformasjonen E på $\mathbf{f}$ to ganger, altså regner ut $E(E(\mathbf{f}))$, hva får du da et estimat på? Utfør denne operasjonen og sammenlign svaret ditt med det eksakte.
- f) Transformasjonen $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ er gitt ved $T(\mathbf{f}) = M \mathbf{f}$ der

$$M = h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad .$$

Hva estimerer denne transformasjonen? Med utgangspunkt i $f(x)$ over, sammenlign med de eksakte verdiene.