
BYFE/EMFE 1000, 2012/2013

Introduksjonsoppgaver i lineær algebra

Oppgave 1 – vektor-aritmetikk

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad .$$

a) Begge vektorane har tre komponentar; dei ligg i $\mathbb{R}^3$.

b)

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x} &= 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-7) \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ -7-1 \\ 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \\ 7\mathbf{x} - 2\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \\ 7 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) \\ 7 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -47 \\ 1 \end{bmatrix} \\ |\mathbf{x}| &= \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{54} \quad . \end{aligned}$$

c) I kommandovindauga i MATLAB:

```
>> x=[2; -7; 1];  
>> y=[0; -1; 3];  
>> 2*x
```

```
ans =
```

```
     4  
    -14  
     2
```

```
>> x+y
```

```

ans =

     2
    -8
     4

>> 7*x-2*y

ans =

    14
   -47
     1

>> norm(x)

ans =

    7.3485

>> sqrt(54)

ans =

    7.3485

```

Vi ser at dette stemmer med svara frå deloppgåve b).

d) Ein lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ kan til dømes vere

$$\underline{3\mathbf{x} + 5\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -26 \\ 18 \end{bmatrix} .$$

Nullvektoren *er* ein lineærkombinasjon fordi

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{y} .$$

e) $\mathbf{u}$ *er* ein lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ fordi vi kan skrive

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{x} + 1\mathbf{y} .$$

Alternativt kan vi forsøke å løyse likninga $\mathbf{u} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}$ og komme fram til at $c_1 = c_2 = 1$. Vi brukar denne metoden for å avgjere om $\mathbf{v}$ er ein

lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2c_1 \\ -7c_1 - c_2 \\ c_1 + 3c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dette gir oss tre likningar som alle skal vere oppfylte:

$$\begin{aligned}2c_1 &= 1 \\ -7c_1 - c_2 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 &= 1\end{aligned}$$

Den fyrste gir at $c_1 = 1/2$, og når vi set det inn i den andre likninga, får vi at $-7 \cdot 1/2 - c_2 = 0$, som igjen gir at $c_2 = -7/2$. Dette må også stemme med den tredje likninga:

$$c_1 + 3c_2 = \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -10 \neq 1 \quad .$$

Vi ser at dette ikkje stemmer; vi klarar ikkje å finne nokon c_1 og c_2 slik at $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}$. Det betyr at $\mathbf{v}$ *ikkje* er nokon lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$

Oppgave 2 – Matrise-vektor-multiplikasjon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- a) For at produktet $A\mathbf{x}$ skal vere veldefinert, må matrisa A ha like mange søyler som søylevektoren $\mathbf{x}$ har komponentar. Dette er tilfelle for produkta $A\mathbf{x}$ og $B\mathbf{y}$, men ikkje for $A\mathbf{y}$ og $B\mathbf{x}$.

b)

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}}} \\ B\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}} \quad .\end{aligned}$$

c) Frå kommandovindauga i MATLAB:

```
>> A=[2 0 7; 2 1 0];
>> B=[0 1; 2 1; 2 0];
>> x=[-4 2 1].';
>> y=[2 -1].';
>> A*x

ans =

    -1
    -6

>> A*y
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.

>> B*x
Error using *
Inner matrix dimensions must agree.

>> B*y

ans =

    -1
     3
     4
```

Dette stemmer bra med svara i a) og b).

d) Påstand:

“For ei generell matrise M med n søyler og ein vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vil matriseproduktet $M\mathbf{x}$ gi ein lineærkombinasjon av søylene i M ”

Vi lar matrisa M ha søylene $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$ og vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Etter definisjonen er då

$$M\mathbf{x} = x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \dots + x_n\mathbf{s}_n .$$

Vi ser at produktet *er* ein lineærkombinasjon av søylene i M ; påstanda er sann.

Oppgave 3 – Transformasjoner

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + \sqrt{x_2} \\ |x_1 + x_2| \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

a) Vi ser at både T og S transformerar vektorar frå $\mathbb{R}^2$, som også er tilrommet til S . Tilrommet for T er $\mathbb{R}^3$.

b)

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2^2 + 0 \\ 2 + \sqrt{0} \\ |2 + 0| \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}} \\ T(\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 \\ 1 + \sqrt{1} \\ |1 + 1| \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}} \\ U(\mathbf{u}) &= U\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 + 2 \cdot 0 \\ -2 + 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}} \\ U(\mathbf{v}) &= U\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 + 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Om vi vel å gjere det med funksjonsfiler i MATLAB, kan funksjonsfilene sjå slik ut:

```
1 function T=TransformT(x)
2
3 % Implementering av transformasjonen T gitt ved
4 % T(x_1,x_2) = [x_1^2+x_2, x_1+sqrt(x_2), |x_1^2+x_2^2|].
5
6 % Kontrollerar at x har to komponentar
7 if length(x)~=2
8     'Feil, x skal ha to komponentar.'
9     return
10 end
11
12 % Tilordning av svaret:
13 T(1)= x(1)^2+x(2);
14 T(2)= x(1)+sqrt(x(2));
15 T(3)= abs(x(1)+x(2));
```

og for S :

```
1 function S=TransformS(x)
2
3 % Implementering av transformasjonen S gitt ved
```

```

4 % S(x_1,x_2) = [x_1+2 x_2, -x_1+x_2].
5 % I denne sammenhengen spelar det ikkje så stor rolle
6 % om x er ein søyle- eller ein rekkevektor.
7
8 % Kontrollerar at x har to komponentar
9 if length(x)~=2
10     'Feil, x skal ha to komponentar.'
11     return
12 end
13
14 % Tilordning av svaret:
15 S(1)= x(1)+2*x(2);
16 S(2)= -x(1)+x(2);

```

I kommandovindauga kan det sjå slik ut når vi reknar ut transformasjonane:

```

>> u=[2 0].'; v=[1 1].';
>> TransformT(u)

```

ans =

```

      4      2      2

```

```

>> TransformT(v)

```

ans =

```

      2      2      2

```

```

>> TransformS(u)

```

ans =

```

      2     -2

```

```

>> TransformS(v)

```

ans =

```

      3      0

```

Om vi gir ein vektor med feil format, kan det sjå slik ut i kommandovindauga:

```

>> x=[1 2 3].';
>> TransformT(x)

```

ans =

Feil, $\mathbf{x}$ skal ha to komponentar.

Merk at vi ikkje har vore så nøye med om vektorane er søyler eller rekker her; i andre samanhenger spelar dette ei stor rolle.

c)

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3^2 + 1 \\ 3 + \sqrt{1} \\ |3 + 1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\U(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= U\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 + 2 \cdot 1 \\ -3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

For å undersøke om T er lineær, samanliknar vi med summen av transformasjonane $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$:

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad .$$

Sidan $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, kan vi vere sikre på at T *ikkje* er lineær.

For U , derimot, har vi at $U(\mathbf{u}) + U(\mathbf{v}) = U(\mathbf{u} + \mathbf{v})$:

$$U(\mathbf{u}) + U(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = U(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad .$$

Men dette viser ingenting; for å kunne seie at U skal vere lineær, må vi vise at dette er tilfelle for *alle* $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$. I tillegg kjem kravet om at $U(c\mathbf{x}) = cU(\mathbf{x})$ for alle $c \in \mathbb{R}$.

d) Lat

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad .$$

Første krav: $U(c\mathbf{x}) = cU(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}U(c\mathbf{x}) &= U\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx_1 + 2 \cdot cx_2 \\ -cx_1 + cx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(x_1 + 2x_2) \\ c(-x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \\&= c \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = cU(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Andre krav: $U(\mathbf{x} + \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}U(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= U\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) \\ -(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \\&= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \\ -x_1 + x_2 + (-y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \\&= U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{y}) \quad .\end{aligned}$$

Vi ser at begge krava er oppfylte for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ og $c \in \mathbb{R}$; U er lineær.

e)

$$\begin{aligned}U(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 1+2\cdot 0 \\ -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\U(\mathbf{e}_2) &= \begin{bmatrix} 0+2\cdot 1 \\ -0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dermed får vi matrisa

$$A[U(\mathbf{e}_1)|U(\mathbf{e}_2)] = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \quad .$$

$$\begin{aligned}A\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = U(\mathbf{u}) \\A\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = U(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Generelt kan vi skrive transformasjonen U som

$$U(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} \quad .$$

Matrisa M er *standardmatrisa* til transformasjonen U .