
BYFE/EMFE 1000, 2012/2013

Introduksjonsoppgaver i lineær algebra

Oppgave 1 – vektor-aritmetikk

Desse vektorane er gitt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

- a) Desse vektorane ligg i vektorrommet $\mathbb{R}^n$ – for kva for ein n ?
- b) Rekn ut følgane:

$$2\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad 7\mathbf{x} - 2\mathbf{y} \quad \text{og} \quad |\mathbf{x}| .$$

- c) Kontrollér svara i MATLAB.

Å tilordne ein søylevektor i kommandovindauga kan gjerast på fleire måtar, til dømes slik

```
>> x=[2  
-7  
1]
```

kor vi har brukt linjeskift (return), eller slik

```
>> x=[2; -7; 1]
```

eller slik:

```
>> x=[2 -7 1].'
```

Operasjonen som bli utført når vi skriv `.'` til slutt, heiter *transponering*. Den endrar ein rekke-vektor til ein søylevektor – og vise versa. Lengda av $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}|$, kan reknast ut slik:

```
>> norm(x)
```

- d) Lag ein eller annan lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

Er nullvektoren,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

ein lineærkombinasjon av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$?

- e) Avgjer om kvar av desse vektorane er lineærkombinasjonar av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Oppgave 2 – Matrise-vektor-multiplikasjon

Desse matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

og desse vektorane:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

er gitt.

- a) Gir alle fire moglege kombinasjonar av matrise og vektor ($A\mathbf{x}$, $A\mathbf{y}$, $B\mathbf{x}$ og $B\mathbf{y}$) veldefinerte produkt?
- b) Rekn ut dei produkta som *er* veldefinerte.
- c) Kontrollér svara dine i MATLAB. Ei matrise kan tilordnast slik:

```
>> A=[2 0 7  
2 1 0]
```

eller slik

```
>> A=[2 0 7; 2 1 0]
```

- d) Stemmer denne påstanda:

“For ei generell matrise M med n søyler og ein vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vil matriseproduktet $M\mathbf{x}$ gi ein lineærkombinasjon av søylene i M ”?

Oppgave 3 – Transformasjoner

Desse to transformasjonane er gitt:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + \sqrt{x_2} \\ |x_1 + x_2| \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

- a) Kva er frå- og tilromma for T og S ?
- b) Finn transformasjonane (eller *bilda*) av kvar av desse vektorane:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Du skal altså rekne ut $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$, $S(\mathbf{u})$ og $S(\mathbf{v})$.)

Om du vil, kan du godt lage ei funksjonsfil og rekne ut transformasjonane i MATLAB. Merk at ei funksjonsfil godt kan ha ein vektor som argument, og “funksjonsverdien” kan også godt vere ein vektor¹. For å vise korleis ein kan gjere dette, kan vi nemne at transformasjonen

$$U\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix}$$

kan implementerast slik:

```
1 function U=TransformU(x)
2
3 % Implementering av transformasjonen U gitt ved
4 % U(x_1,x_2) = [x_1^2, x_2^2, sqrt(x_1^2+x_2^2)].
5 % I denne sammenhengen spelar det ikkje så stor rolle
6 % om x er ein søyle- eller ein rekkevektor.
7
8 % Kontrollerar at x har tre komponentar
9 if length(x)~=3
10     'Feil, x skal ha tre komponentar.'
11     return
12 end
13
14 % Tilordning av svaret:
15 U(1)= x(1)^2;
16 U(2)= x(2)^2;
17 U(3)= sqrt(x(1)^2+x(2)^2);
```

Symbolet ‘~=’ i linje 9 betyr ‘er ikkje lik’, eller ‘≠’ i matematikk-notasjon.

¹Sånn sett burde vi kanskje heller kalle det *transformasjonsfiler*, ikkje funksjonsfiler.

- c) Rekn også ut $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ og $S(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ bruk svaret til å avgjøre om T er lineær.

Kan du avgjøre om S er lineær ut frå dette?

- d) Vis at S er lineær.

- e) Rekn ut $S(\mathbf{e}_1)$ og $S(\mathbf{e}_2)$ der

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

og lat matrisa A ha disse svara som søyler – i denne rekkefølga.

Rekn ut produkta $A\mathbf{u}$ og $A\mathbf{v}$ – enten i MATLAB eller på papir. Ser det kjent ut?