Foreleseing 6/3

① Om obligen

- Mykje bra.
- Tre ting som går igjen
  - ☆ Bruk og ikkje av =

$$\int x \sin x^2 \, dx$$

$$u = x^2, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$= \int x \sin u \frac{1}{2x} du = \dots$$

- Kva „er lik $\int x \sin u \frac{1}{2x} du$" ?

  - ☆ Grenser ved variabelbyte

$$„\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin u \frac{1}{2x} du =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin u \, du = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1"$$

- Tungvindt
- Feil

* Konvergens ved integrering.

$\int_0^2 \sin x^2 \, dx$ kan ikkje vere avhengig av n. Sjekk dette!

- Blir delt ut igjen mandag.
- Dei som må levere på nytt, har frist til mandag 17. kl 14:00.

NB: Levèr på kontoret mitt.

② Lineær algebra – så langt (kort oppsummering)

- Skal sjå på vektorar i $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$
- Matrise vektor-produkt

$$A \vec{x} = [\vec{s}_1 | \vec{s}_2 | \ldots | \vec{s}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$x_1 \vec{s}_1 + x_2 \vec{s}_2 + \ldots + x_n \vec{s}_n$$

- Lineær-kombinasjon av søylene i A.

Transformasjon $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underset{\text{Frårom}}{\mathbb{R}^n} \to \underset{\text{Tilrom}}{\mathbb{R}^m}$$

T lineær:

1) $T(c\vec{x}) = c\,T(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$

2) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

For lineære trans. frå $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$:

T kan skrivast slik:

$T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$

der A er ei $m \times n$-matrise.

– Standardmatrisa til T.

A kan finnast slik:

$A = [T(\vec{e}_1) \mid T(\vec{e}_2) \mid \ldots \mid T(\vec{e}_n)]$,

der $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ er standardbasisen til $\mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eksempel

Transformasjonen T frå $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$ er loddrett projeksjon ned i yz-planet.

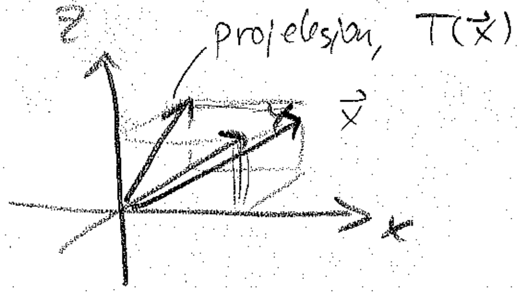
$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Både T og S er lineære

a) Finn standardmatrisa A og B til T og S, h.v., og bruk desse til å finne bilda av $\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Trans. U frå $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$ endrer ingenting. Finn standardmatrisa til U.



der: – Fjernar $\vec{x}$-komponenten

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \text{–nullvektor}$$

$T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$ og $T(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$ – uendra

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ med $A = [T(\vec{e}_1) | T(\vec{e}_2) | T(\vec{e}_3)] =$

$$[\vec{0} | \vec{e}_2 | \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$S(\vec{x}) = B\vec{x}, \quad B = [S(\vec{e}_1) \mid S(\vec{e}_2) \mid S(\vec{e}_3)]$$

$$S(\vec{e}_1) = S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 2\cdot 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Alternativt:

$$S(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B\vec{x} \text{ med } \underline{B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$S(\vec{u}) = B\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 7 + 0\cdot(-2) + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 7 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}}$$

b) $U(\vec{x}) = C\vec{x}$, $U(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $U(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$, $U(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$

$$C = [\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2 \mid \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - identitetsmatrisa } I_3$$

For alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$: $I_3\,\vec{x} = \vec{x}$

Tilsvarande i $\mathbb{R}^2$: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og i

$\mathbb{R}^4$: $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

③ Lineære likningssystem

- Involverer berre summar og konstantar gonger dei ukjende, t.d. $5x_1 + 2x_2 = 5$.
- Ikkje $\sqrt{x}$, $\cos x_2$, x_3^2 etc.

To vanlege metodar:

- Innsettingsmetoden og addisjonsmetoden
- Vi brukar den siste.

Eksempel

Løys dette likningssystemet:

$$
\begin{aligned}
3x_2 + x_3 &= 9 && \text{I} \\
2x_1 + 2x_3 &= -4 && \text{II} \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 && \text{III}
\end{aligned}
$$

- Går litt omstendeleg fram:

Byttar II og I:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_3 &= -4 && \text{I} \\
3x_2 + x_3 &= 9 && \text{II} \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 && \text{III}
\end{aligned}
$$

Deler I på 2 (gangar med $1/2$):

$$x_1 + \quad x_3 = -2 \qquad \mathrm{I}$$
$$3x_2 + x_3 = 9 \qquad \mathrm{II}$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_2 = 2 \qquad \mathrm{III}$$

Legg -2 gonger I til III:

$$\begin{array}{rl} & -2x_1 \quad -2x_3 = +4 \\ + & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \hline & 0 \quad +2x_2 + x_3 = 6 \end{array}$$

$$x_1 + \quad x_3 = -2 \qquad \mathrm{I}$$
$$3x_2 + x_3 = 9 \qquad \mathrm{II}$$
$$2x_2 + x_3 = 6 \qquad \mathrm{III}$$

Kan legge $-\frac{2}{3} \times \mathrm{II}$ til III

For å sleppe brøkrekning: trekk III frå II:

$$x_1 + \quad x_3 = -2 \qquad \mathrm{I}$$
$$x_2 \quad = 3 \qquad \mathrm{II}$$
$$2x_2 + x_3 = 6 \qquad \mathrm{III}$$

- Legg $-2 \times \mathrm{II}$ til III

$$x_1 + \quad x_3 = -2$$
$$x_2 \quad = 3$$
$$x_3 = 0$$

$-1 \times \text{III}$ til I:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= -2 \\ x_2 \quad &= 3 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi innfører ein litt meir kompakt skrivemåte for dette

Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} -1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} -1 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tilbake til likningssyst.:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= -2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 0$$

Matrisa vi startar med, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, kallar vi totalmatrisa (augmented matrix) for likningssystemet.

Operasjonane vi gjer, kallar vi rekke-operasjonar.

Tre typar:

1) Byte om på rekker.

2) Multiplisere ei rekke med eit tal ulik 0.

3) Legge eit multiplum av ei rekke til ei anna rekke.

Vi har rekkeoperert på totalmatrisa slik at vi har fått ho på redusert trappeform.

Trappeform (echelon form):

- Det fyrste talet ulik 0 i kvar rekke står til venstre for det fyrste talet ulik 0 i rekka nedanfor
- Nullrekker nedst.

Eksempel

Leiande tal (pivot position)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja Nei

Redusert trappeform (reduced echelon form):

1) Trappeform

2) Alle leiande tal er 1 (leiande einar)

3) Alle tal <u>over</u> leiande tal er 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nei Ja

→ Vise rref-funk. i MATLAB.

Poeng: Denne er <u>unik</u>.

$\sim$: „er rekkeekvivalent med"; vi kan få den eine frå den andre ved elementære rekkeoperasjonar.

Merk: Likningsystemet kan skrivast på mange måtar:

$$\left.\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + \quad 2x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

Koeffisientmatrise

Generelt: $A\vec{x} = \vec{b}$, Totalmatrise $[A \mid \vec{b}]$

Eksempel

Ei som skal måle leiligheten sin kjøper to typar måling i to omgongar. Fyrste gongen kjøper ho 4 l kvit og 3 l blå. Det kostar 600 kr. Neste gong kjøper ho 2 l kvit og leverer tilbake 1 l blå. I netto betalar ho 50 kr.

Kva kostar målingane?

x_1: Talet på liter kvitmåling
x_2: —— " —— blåmåling

Veit:

$$4x_1 + 3x_2 = 600$$
$$2x_1 - x_2 = 50$$

Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 600 \\ 2 & -1 & 50 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ -2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 500 \\ 2 & -1 & 50 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{5} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 50 \\ 0 & 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ 1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 100 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x_1 = 75 \\ x_2 = 100 \end{array}$$

Kvitmålinga kostar 75 kr/l og blåmålinga kostar 100 kr/l