

Foredlesing 1/4

① Oblig - ny og gammel



② Eksempel fra notat 27/3

Prøve: Vise at en funksjon er løsning

Oppg. 4.2:1,2 om igjen på planen

③ Separable differensialligningar (4.6)

- Prøver å skille y og x fra
hverandre

Eksempel (læreboka s. 198)

Løs differensialligning

$$e^{-x} y' = 1 + y^2$$

$$e^x \cdot e^{-x} y' = e^x (1+y^2)$$

$$y' = e^x (1+y^2)$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{e^x (1+y^2)}{1+y^2}$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = e^x$$

To måter å se på

1) Antideriverer begge sider:

$$\int \frac{1}{1+y^2} y' dx = \int e^x dx$$

$$y' dx : dy$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int e^x dx$$

2) Reknar med dx og dy som algebraiske

størteikar: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{1}{1+y^2} dy = e^x dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int e^x dx$$

$$\arctan y + C_1 = e^x + C_2$$

$$\arctan y = e^x + \underbrace{C_2 - C_1}_C$$

$$y = \tan(e^x + C)$$

- Generell løsning; C er ukjent
- Kunne ha bestemt C om vi hadde hatt et initialbetingelse

Oppsummering

- En separabel differensial likning kan skrives som

$$q(y) y' = p(x)$$

- Kan løses som $\int q(y) dy = \int p(x) dx$

Eksempel (frå torsdag)

- 1) Finn den generelle løsningen av

$$y' = (x+3) \cos^2 y$$

- 2) Finn den løsningen som oppfyller

$$i) \quad y(0) = 0$$

$$ii) \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

a)

$$\frac{dy}{dx} = (x+3) \cos^2 y$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} dy = (x+3) dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int (x+3) dx$$

$$\tan y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C'$$

$$y = \arctan\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + C'\right) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) i) $y(0) = 0$

$$\arctan\left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + C'\right) + n \cdot \pi = 0$$

$$\arctan u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$n = 0 \quad \text{og} \quad \arctan C' = 0$$

$$C' = 0$$

$$y(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$$

I MATLAB: Spør om Eulers metode gir det samme.
($x \in [0, 3]$)

$$ii) y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(0 + c) + n \cdot \pi = 0$$

$$\text{Anten: } n=1 \text{ og } \arctan c = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Eller: } n=0 \text{ og } \arctan c = \frac{\pi}{2}$$

Men: Ingen av disse likningene har

løsning; $\lim_{c \rightarrow -\infty} \arctan c = -\frac{\pi}{2}$ og

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$$



$$\text{Løsning: } y \equiv \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ser: } y' = 0 \text{ og } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ slik at}$$

$$y' = (x+3) \cos^2 y \text{ er oppfylt.}$$

-Initialkrevet også oppfylt.

→ Plot i MATLAB - med retningsfelt.

Eksempel

En bakteriekultur vokser med en fart som er proporsjonal med talet på bakterier.

- a) Sett opp en enkel modell for dette talet som funks. av tid, $B(t)$. Eining: 1000 bakter.
- b) Gitt at dette talet er doblet på 10 timer, bestem bakterietallet som en funks. av tid.
- c) ~~Denne~~ Vi tenker oss at modellen blir justert for at vekstgrunnlaget er avgrenset. Dette kan gjøres slik:

$$B'(t) = k B \left(1 - \frac{B}{L}\right)$$

Kva er det største B kan bli?

- d) Løs differensiallikninga i c) med k fra b), $L = 15$ og $B(0) = 2$

a) $B' = k \cdot B$ (Ikke så mye mer å seie...)

b) $\frac{dB}{dt} = kB \Leftrightarrow \frac{dB}{B} = k dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{B} dB = \int k dt \Leftrightarrow$

$(\ln |B| = kt + C \Leftrightarrow |B| = e^{kt+C} = e^C e^{kt} \Leftrightarrow$

$B = \pm e^C e^{kt} = B_0 e^{kt}, \quad B_0 = \pm e^C$

$B(t) = B_0 e^{kt}$

Veit $B(10) = 2 \cdot B(0)$

$B_0 e^{k \cdot 10} = 2 B_0 e^0$

$e^{10k} = 2$

$10k = \ln 2$

$k = \frac{\ln 2}{10}$

$B(t) = B_0 e^{\frac{\ln 2}{10} t} = B_0 (e^{\ln 2})^{t/10} = \underline{B_0 2^{t/10}}$

c) Ser: $B=L$ gir $B' = k \cdot B \cdot (1 - \frac{B}{L}) = k \cdot L (1 - \frac{L}{L}) = 0$

-Farten blir null når B blir L

Også: $B' \rightarrow 0$ når $B \rightarrow L$

L er altså maksimalt tal på bakterier

B vil slutte å velse når B nærmer

seg L . For B mye mindre enn L :

$B' \approx k B$ - som før

$$\frac{dB}{dt} = k B \left(1 - \frac{B}{L} \right) \Leftrightarrow \frac{dB}{B(1 - \frac{B}{L})} = k dt$$

$$\int \frac{1}{B(1 - \frac{B}{L})} dB = kt + C$$

Delbrøksopspalting: $\frac{1}{B(1 - \frac{B}{L})} = \frac{a}{B} + \frac{b}{1 - \frac{B}{L}} \Leftrightarrow$

$$1 = a(1 - \frac{B}{L}) + b \cdot B = a + (b - \frac{a}{L})B$$

$$a = 1 \quad \text{og} \quad b - \frac{a}{L} = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 1 \quad \text{og} \quad b = \frac{1}{L}$$

$$\int \frac{1}{B(1 - \frac{B}{L})} dB = \int \left(\frac{1}{B} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{B}{L}} \right) dB =$$

$$\ln |B| - \int \frac{1}{B-L} dB = \ln |B| - \ln |B-L| + C' =$$

$$\ln \left| \frac{B}{B-L} \right| + C'$$

Vi får:

$$\ln \left| \frac{B}{B-L} \right| = kt + C$$

$$\frac{B}{B-L} = \pm e^C e^{kt} = C_1 e^{kt}$$

$$B = C_1 e^{kt} (B-L)$$

Initialbetingelse: $B(0) = 2$

$$2 = C_1 \cdot e^0 (2-15) \Leftrightarrow C_1 = -\frac{2}{13}$$

Vi får:

$$B = -\frac{2}{13} e^{kt} (B-15)$$

$$B(1 + \frac{2}{13} e^{kt}) = \frac{30}{13} e^{kt}$$

$$B(t) = \frac{\frac{30}{13} e^{kt}}{1 + \frac{2}{13} e^{kt}} = \frac{\frac{30}{13} e^{kt} \cdot 13 e^{-kt}}{(1 + \frac{2}{13} e^{kt}) \cdot 13 e^{-kt}} =$$

$$\frac{30}{13 e^{-kt} + 2} = \frac{30}{13 \cdot 2^{-t/10} + 2}$$

$$B(t) = \frac{30}{13 \cdot 2^{-t/10} + 2}$$

Hvis tid:

Hvis vi nu ser på slide at mengde framleis blir doble på dei to fyrste timane, kva er k da?

$$B(t) = \frac{30}{13 e^{-kt} + 2}$$

$$B(10) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{30}{13 \cdot e^{-10k} + 2} = 4 \Leftrightarrow 30 = 52 e^{-10k} + 8 \Leftrightarrow$$

$$e^{-10k} = \frac{30-8}{52} = \frac{22}{52}$$

$$-10k = \ln \frac{22}{52} = -\ln \frac{52}{22}$$

$$k = \frac{\ln \frac{52}{22}}{10} \approx 0.0860$$

$$B(t) = \frac{30}{13 \cdot e^{-0.0860t} + 2}$$

