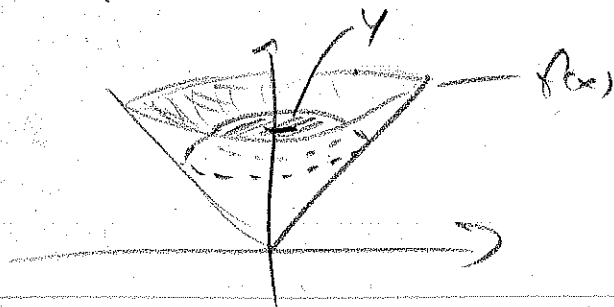


Foredlesing 27/3

① Beskjedar?

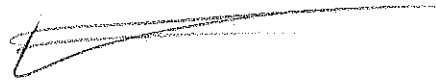
② Eksempel

Eit vasskar har fasong som ei snudd keigle der sidekantane danner vinkelen $60^\circ = \pi/3$ med horisontalen. Vatnet har høgd y dm.



- Kva er volumet av vatnet
- Vi heller i vatn med farten 0.5 l/s . Kor fort aukar y når $y = 3$?
- Vi drar ut ein propp så vatn renn ut gjennom eit lite hol med areal $a = 0.1 \text{ dm}^2$. Gitt at farten vatnet har når det renn ut er $14\sqrt{y} \text{ dm/s}$, set opp

ei differensial-løsning som y må oppfylle.



a) Rundreiring om y -aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

Her: $f(x) = \tan \frac{\pi}{3} x = \sqrt{3} x$

Men vi vil ha volumet over $f(x)$, ikke det under.

Integrationsgrenser: 0 og $Y/\sqrt{3}$

Volum: Sylinder minus det under $f(x)$:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{Y}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot Y - 2\pi \int_0^{Y/\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{3} x dx =$$

$$\pi \cdot \frac{1}{3} Y^3 - 2\pi \cdot \sqrt{3} \int_0^{Y/\sqrt{3}} x^2 dx =$$

$$\frac{\pi}{3} Y^3 - 2 \cdot \sqrt{3} \pi \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^{Y/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} Y^3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{\sqrt{3}}\right)^3 =$$

$$\frac{\pi}{3} Y^3 - 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} Y^3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) \pi Y^3 = \frac{\pi}{9} Y^3$$

Volumet er $\frac{\pi}{9} Y^3 l$. ($1l = 1 \text{ dm}^3$)

b) No: Høyde y og volumet V avtar
 $y(t)$ og $V(t)$

$$V(t) = \frac{\pi}{9} (y(t))^3$$

Vert $V'(t)$ og y , skal finne $y'(t)$.

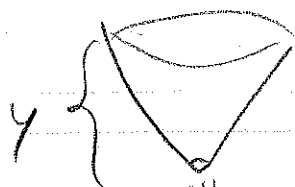
Kjernerregelen:

$$V'(t) = \frac{\pi}{9} \cdot 3 y^2 \cdot y'(t) = \frac{\pi}{3} y^2 \cdot y'(t)$$

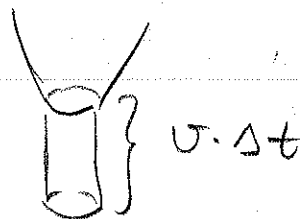
$$y'(t) = \frac{3}{\pi} \frac{V'(t)}{y^2} = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{0.5}{3^2} \approx 0.053$$

Høgde aukar med $0.053 \text{ dm/s} = 0.53 \text{ cm/s}$

c)



— fart: $14\sqrt{y}$



Endring i volum:

$$\text{Ca. } v(t) \cdot \Delta t = 14\sqrt{y(t)} \cdot \Delta t = a$$

$$\text{Altst: } V(t + \Delta t) - V(t) = -14\sqrt{y} \cdot \Delta t \cdot 0.1 = -1.4\sqrt{y} \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = -1.4\sqrt{y}$$

$$\Delta t \rightarrow 0: V'(t) = -1.4\sqrt{y}$$

— Frauleis: positivt bidrag til $V(t)$ også.

$$V'(t) = -1.4\sqrt{y} + 0.5$$

$$\text{Også: } V'(t) = \frac{\pi}{3} y^2 \cdot y'$$

Altst:

$$\left(\frac{\pi}{3} y^2 \cdot y' = 0.5 - 1.4\sqrt{y} \right)$$

Jamvikt?

$$y' = 0: 0 = 0.5 - 1.4y, y = \frac{0.5}{1.4} = 0.357$$

— ca 3.6 cm

④ Eulers metode (4.2)

En differensiallikning som inneheld y' men ikkje høigare ordens deriverte (y'' , $y^{(3)}$ etc.), seier vi er av første orden.

En slik kan skrives på denne måten:

$$y' = F(x, y) \quad \leftarrow \text{funksjon av to variabler}$$

Eksempel:

$$y' = x + \sin y \quad (F(x, y) = x + \sin y)$$

F kan også være en ren funksjon av berne x eller y .

Monolog: $y' = 2x + \sin x$

Eller: $y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{k} \cdot y$ (skal sjå denne igjen)

Påstand: Vi har lært nok til å kunne løse $y' = F(x, y)$.

[?] Kor lei?

[?] Hva skal til for at dette er sant?

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x) \cdot h$$

- Sant hvis h er liten (1. ordens Taylorpol.)
- Dette kan vi gjere om igjen og om igjen

[?] Korleis starter vi?

- Må ha eit initialbetingelse - eit punkt (x_0, y_0) og størrelse h

Med $y(x_0) = y_0$

$$y(x_0+h) \approx y_0 + y'(x_0) \cdot h = y(x_0) + F(x_0, y_0) \cdot h = y_1$$

fordi $y' = F(x, y)$

$$y_1 \approx y(x_0+h) = y(x_1)$$

$$y_2 \approx y(x_0+2h) \approx y_1 + y'(x_1, y_1) h$$

etc.

Per feil for MATLAB!

→ Implementer, se

$$y' = x + \sin y, \quad y(-4) = 4$$

[?] Korleis kontrollere vi svaret?

Variere N ($h = \frac{x_F - x_0}{N}$).

Dette er Eulers metode

(den siste algoritmen vi skal lære i kurset).

Kraftig kost;

med MATLAB - og test - kan vi "løse" leve initialverdi-problem,

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

som helst!

"løse": Finne eit estimat som er vilkårlig nære det eksakte.

Nytt eksempel:

$$y' = (x+3) \cos^2 y, \quad y(-5) = 1$$

→ MATLAB

⑤ Retningsfelt

Moral:

- Når vi er i et bestemt punkt, vil den deriverte, $y' = F(x, y)$, fortelle oss hvor vi skal gå videre.

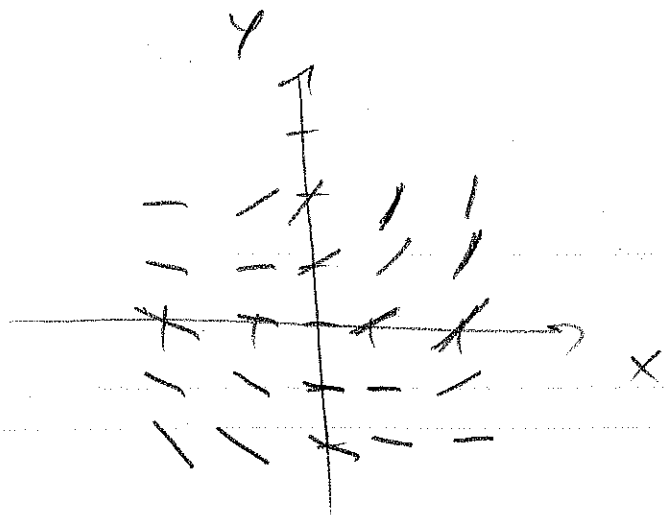
Men:

- Kva om vi ikke vet hvor vi skal starte, kan vi da se nok om hvor vi skal gå?
- Gir $y' = F(x, y)$ nok som helst informasjon om $y(x)$, uten et initierende?
- Ja.

Eksempel: $y' = x + y = F(x, y)$

Tabell:

$x \rightarrow$		-2	-1	0	1	2
$y \downarrow$ $F(x, y)$	-2	-4	-3	-2	-1	0
	-1	-3	-2	-1	0	1
	0	-2	-1	0	1	2
	1	-1	0	1	2	3
	2	0	1	2	3	4



- Gir oss eit bilete av løysa $y(x)$ vi
går - for ulike utgangspunkt (initial-
kvar).

→ MATLAB

-Ta med eksempel frå tidlegare

⑥ Midtpunktmetoden (ikke pensum)

Her sett:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

er eit betre

estimat enn $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ eller

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Og: Om ein skal estimere eit integral

Sammen et Riemann-sum over en regulær
partisjon, gir en seleksjon med midt-
punkt det beste estimatet.

Tilsvarende kan "framover - Euler" bli
bedre.

Har: $y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) \cdot h$

Belever:

$$y_n = y_{n+1} - F(x_{n+1}, y_{n+1}) \cdot h$$

Snitt:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} (F(x_n, y_n) + F(x_{n+1}, y_{n+1})) \cdot h$$

Problem: Implisitt, y_{n+1} på begge sider.

Eksplicit metode - Eulers midtpunktmethode:

$$y_{n+1} = y_n + F(\hat{x}_n, \hat{y}_n) h$$

der $\hat{x}_n = x_n + \frac{h}{2}$ og

$$\hat{y}_n = y_n + F(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}$$

- Lite justering.

- Veldig mye bedre metode

→ Demonstrere i MATLAB

Ny beøring: Runge-Kutta (ikke i pensum).

7

Eksempel

a) Vis at $y = -x - 1 + C e^x$

er en løsning av

$$y' = x + y$$

uansett hva C er.

b) Finn den løsningen som oppfyller
initialverdi $y(0) = 0$

a) $y = -x - 1 + C e^x$ ← Generell løsning

$$y' = -1 - 0 + C e^x = -1 + C e^x$$

Set inn:

$$x + y = x + (-x - 1 + C e^x) = -1 + C e^x = y' \quad \square$$

b) Skal ha: $y(0) = 0$

$$-0 - 1 + C e^0 = 0$$

$$-1 + C = 0$$

$$C = 1$$

$$y = -x - 1 + e^x$$

Den spesielle løsningen
som oppfyller $y(0) = 0$

Hvis tid:

Løys også den homogene lineære differensial-
likninga $y' - y = 0$

/

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y$$

Kva funksjoner er sånn?

e^x

Også: $C \cdot e^x$

$$y_h = C \cdot e^x$$

-Kjenner dette att fra den likninga
vi hadde i stid

$$y' - y = x \text{ gir } y = -x - 1 + y_h$$

$y_p = -x - 1$ - spesiell/partikulær løsning.