

Forelesing 24/3

① Minne om oblig-levering

Oblig 2 - andre gang: Lagt ut

② Eksempel med determinanter
(sic notat fra 20/3)

③ Eksempel

Angi om følgende sett med vektorer er lineært avhengige:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Ekstra: Om det går: Skriv en av vektorane i b) som en lineærkombinasjon av dei to andre

a) 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$. -Må vere lineært avhengig.

b) Om vi set vektorane opp som søyler i ei matrise, blir matrisa kvadratisk. Vi kan avgjere svaret ved å sjå på determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-2-2) + 2 \cdot (5-(-1)) = -12 + 12 = 0$$

Det. er null $\Leftrightarrow$ søylene er lin. avh.

c) Her: Ikke kvadratisk matrise; kan ikke bruke determinanten. Gjør framleis: Lin. uavh. $\Leftrightarrow$ leide tal i hver søyle når vi set vektorane opp som søyler i ei matrise.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{7} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Levende tal i hver søjle, vektorerne (søjlene) er lineært uafhængige.

5) - igen

Om vi finder en ikke-triviell løsning

af $A\vec{x} = \vec{0}$, der $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, kan vi skrive vektorerne som lineær-kombinationer af krænder

Rektreducerer:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xleftarrow{\frac{1}{2}} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow -1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alt $\vec{0}$: $x_1 = -2x_3$, $x_2 = x_3$

$$-2x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

med $x_3 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

④ For ikke-kvadratiske matriser

Stort theorem for $n \times n$ -matriser:

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \sim I_n \Leftrightarrow$ leiende tal i hver søjle

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ har altid (enbetydig) løsning $\Leftrightarrow$

$A\vec{x} = \vec{0}$ har kun den trivielle løsning $\Leftrightarrow$

søjlerne i A er lin. uafh. $\Leftrightarrow$

A invertibel $\Leftrightarrow \det A^T \neq 0$



Alt det ovenfor gælder
også for rekker.

Kva med rektangulære, $m \times n$ -, matriser?

Leiende tal i hver søjle $\Leftrightarrow$

Aldri uendelig mange løsninger af $A\vec{x} = \vec{b}$
(Anten enbetydig eller inkonsistent) $\Leftrightarrow$

Lin. uafh. søjler

Leiende tal i hver række $\Leftrightarrow$

$A\vec{x} = \vec{b}$ altid konsistent (ei eller uendelig mange
løsninger) $\Leftrightarrow$ Lin. uafh. rekker.

- Kan ikke snakke om invers og determinant.

Gratisk måte å sjø lineær avhengig-
het på

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ lin. avh. } \Leftrightarrow$$

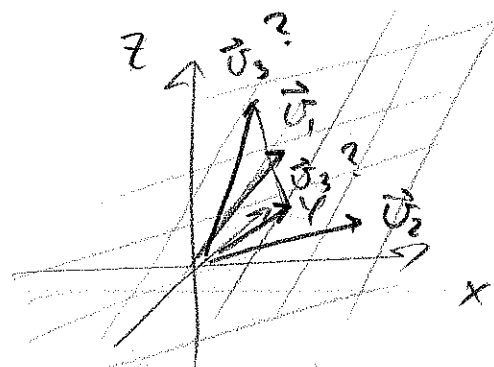
minst en av vektorane er en
lin. komb. av dei andre.

Dersom $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ ikke er parallelle:

Span $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ blir et plan i $\mathbb{R}^3$ gjennom
origo.

Dersom $\vec{v}_3 = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$: $\vec{v}_3$ ligg i dette
planet

→ MATLAB-demo



⑤ Kramers regel (3.3 - ikke pensum)

Seier:

Hvis A er ei invertibel $n \times n$ -matrise, kan vi finne løsningen av $A\vec{x} = \vec{b}$ ved

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$

der x_i er komponent nummer i i $\vec{x}$ og $A_i(\vec{b})$ er lik A - bortsett fra at $\vec{b}$ er sett inn i søyle i .

Eksempel

Løs likningssystemet

$$4x_1 - 2x_2 = 3$$

$$-7x_1 + 4x_2 = 2$$

Ved Kramers regel og ved rekke-reduksjon.

~~6~~

a) Kan skrives som $A\vec{x} = \vec{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - (-2) \cdot (-7) = 2$$

-6-

$$\det A_1(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-4) = 16$$

$$\det A_2(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - (-21) = 29$$

$$x_1 = \frac{\det A_1(\vec{b})}{\det A} = \frac{16}{2} = \underline{8}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\vec{b})}{\det A} = \frac{29}{2}$$

Alternativt:

Totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & -29 \end{bmatrix} \leftarrow -\frac{1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{29}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 = 8 \\ x_2 = \frac{29}{2} \end{matrix}$$

- Kjøppst med den siste matrisen

Kramers regel kan brukast til å finne ein eksplisitt formel for A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T$$

$$= \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Kofaktormatrisa: $\text{cof } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$

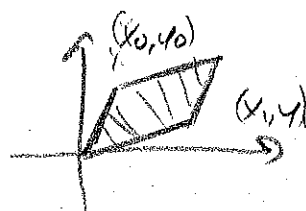
der $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

↑
Fjerne række i , søyle j i A .

- sjelden særlig praktisk formel; det er
række-reduktion som gælder ($|A| \sim \dots \sim |A^{-1}|$).

Determinanten kan også tolkes geometrisk,

$|\det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{bmatrix}|$ - areal af parallelogram



- Tilsvarende for parallellepiped i $\mathbb{R}^3$.

→ That's it for linear-algebra

⑥ ... and now for something completely different:

Differensiallikninger (4.1 i Kalkulus)

↑
Ikke pensum

"Voulege" (algebraiske) likninger:

Skal finne et uavhengig tal -
typisk x .

Differensial-likninger:

Skal finne en uavhengig funksjon -
typisk $y(x)$. I likningene inngår
 y' - og gjerne også høyere ordens
deriverte.

Eksempel ("båndt")

a) Bestem $y(x)$ når $y' = 2x + \sin x$

b) Bestem $y(x)$ når $y' = 2x + \sin x$ og $y = 3$
når $x = 0$.

Har $y'(x)$, kan finne y ved anti-derivasjon:

$$y(x) = \int (2x + \sin x) dx = \underline{x^2 - \cos x + C'}$$

Merk: $y(x)$ ikke helt bestemt, vi vet ikke hva C' er.

5) $y(0) = 3$ — initialkrav

$$0^2 - \cos 0 + C' = 3$$

$$-1 + C' = 3$$

$$C' = 3 + 1 = 4$$

Altså

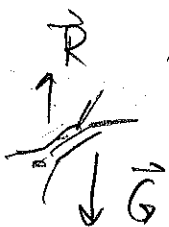
$$\underline{y(x) = x^2 - \cos x + 4}$$

— Måtte ha et initialkrav i tillegg til differensial-løsningen for å bestemme $y(x)$.

Eksempel (litt fysik)

For ein fallskjermerhopper på 75 kg:

Still opp ei likning for farten v som funksjon av tida t når vi går ut frå at luftmotstanden er proporsjonal med farten, og tyngdeakselerasjonen er $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Krefter:  $\vec{G}$: Tungdekreft
 $\vec{R}$: Luftmotstand

$$|\vec{G}| = mg, |\vec{R}| = kv, k: \text{konstant. } m = 75 \text{ kg}$$

Med positiv retning nedover:

$$ma = mg - kv$$

Vi har her brukt Newtons andre lov, som seier at summen av alle krefter er masse ganger akselerasjon.

Veit: $a(t) = v'(t)$

Altså: $m v'(t) = mg - kv \Leftrightarrow$

$$v'(t) = g - \frac{k}{m} v(t)$$

- Differensiallikning.

Dermed maksimal fart for hopparen er $v_{\max} = 200 \text{ km/h} \approx 55.6 \text{ m/s}$ - kva

er k ?

Maximal fart: Farten endrer seg ikke,
 $v'(t) = 0$.

I likevingd:

$$0 = g - \frac{k}{m} v_{\max}$$

$$k = \frac{g \cdot m}{v_{\max}} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 75 \text{ kg}}{55.6 \text{ m/s}} = \underline{13.2 \text{ kg/s}}$$