

Forelesing 2013

① Info/beskjeder?

② Vise en del matrise-ting i MATLAB

- Aritmetiske
- Null, ein- og identitetsmatriser
- Tilfeldige tal
- Røttereduksjon (rref)
- Invertering (inv)

③ Metode for invertering: $[A|I] \sim \dots \sim [I|A^{-1}]$

Hvis det ikke går: A er ikke invertibel.

[?] Hvis A er invertibel, hva kan vi se om likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$?

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad - \text{enbrydig løsning.}$$

I så fall: Kan man vi seie om løsen.

$$A\vec{x} = \vec{0}?$$

→ Berre den trivielle løysing.

I så fall: Kan man vi seie om søylene til A ?

→ Lineært uavhengige

Ein "brøte" med ekvivalensar:

Før er $n \times n$ -matrise A :

$$A \sim I_n \Leftrightarrow A \text{ er invertibel } (\Rightarrow)$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ har entydig løysing } (\Rightarrow)$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \text{ har berre den trivielle løysing } (\Rightarrow)$$

$$\text{Søylene i } A \text{ er lineært uavhengige } (\Rightarrow)$$

Leidende tal i kvar søyle

Spoiler alert: Følgande kan leggjast til

i ekvivalens-relat: $\det A \neq 0$

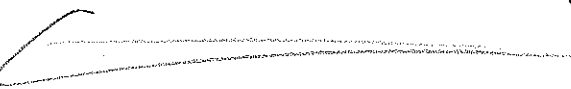
- Determinanten

Eksempel

Gitt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},$$

- a) er A og B invertible?
b) er søylene i A og søylene i B lineært uavhengige?



Eigentleg: Same spørsmål to ganger (for kvadratiske matriser)

Like gjerne: Har matrisene ledende tal i hver søyle?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A er ikke invertibel og søylene er lineært avhengige

B er invertibel og søylene er lineært uavhengige.

Alternativt: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertibel $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

For A: $1 \cdot 8 - 4 \cdot 2 = 0$

u B: $2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 2 \neq 0$

② När är två vektorer linjärt oberoende?

→ När den ena är ett multiplum av den andra.

For A: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

③ Determinanter

Har alltså kan ett par funger.

Nett i stället:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Kryss-produkt:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - (-1) \\ 3 - 10 \\ -5 - (-6) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

↑
Rette strekar,
i klype parantes

Definisjon

For ei $n \times n$ -matrise A er determinanten

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$
$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

der a_{ij} er elementet i rekke i , søyle

j i A og A_{ij} er matrise n' får ved

å fjerne rekke i og søyle j fra A

Merke: A_{ij} er ei $(n-1) \times (n-1)$ -matrise

Determinanten til ei $n \times n$ -matrise er altså summen av n " $(n-1) \times (n-1)$ -determinanter". Definisjonen er rekursiv, vi treng derfor for å finne neste (jmf. Newtons metode).

- Må vite kor n starter:

For ei 1×1 -matrise (ert tdl)

$$A = [a_{11}], \det A = a_{11}.$$

Eksempel

Find determinanten til disse matricer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(Ibereg absolutværdi)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot |1| - 3 \cdot |7| = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 7 = -19$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a|d| - b|c| = ad - bc \quad (\text{seff for})$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-4 \cdot (0 \cdot 2 - 8 \cdot 3) - 2 \cdot (-1 \cdot 2 - 8 \cdot 7) + 3 \cdot (-1 \cdot 3 - 0 \cdot 7) =$$
$$-96 + 116 + 9 = \underline{11}$$

Kontrollere i MATLAB?

To ting som gjer det lettare å rekne ut determinantar

- 1) I definisjonen går vi langs rekke 1. Vi kan like godt gå langs lea søyle eller rekke som helst:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{rekke } i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{søyle } j)$$

- 2) Rekkeoperasjonar påverkar determinanten slik:
- Bytte om to rekker: det. endrar forteikn
 - Gange ei rekke med eit tal: det. blir gange med det same talet
 - Legge eit multiplum av ei rekke til ei anna rekke: det. uendra.

- Skal ikkje berise dette, men vi testar det på 4-matrise frå eksemplet

Merk: Ingen rekkoperasjonar kan endre det. frå ulik 0 til 0 - eller vise versa

1) Longs rekke 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$- (-1) \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 0 - 8 \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 7) = -5 + 16 = \underline{11}$$

Longs 3. style:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-3 - 0) - 8 \cdot (12 - 14) + 2 \cdot (0 - (-2)) = -9 + 16 + 4 = \underline{11}$$

$$2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= - (4 - 9) - 0 + 8 (12 - 14) = 5 - 16 = -11 = -\det A$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$8 = (0 - 24) - 4 \cdot (-2 - 56) + 6 \cdot (-3 - 0) = 22 = 2 \det C'$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} ? \\ ? \\ ? \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 35 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 58 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 58 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 35 \\ 3 & 58 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 35 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 35 \\ 3 & 58 \end{vmatrix} = 11 = \det C$$

Poeng: Ved å få mange 0-er langs ei rekke eller ei søyle, blir det lettere å rekne ut determinanten.

- Sjekk brett av + og -:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

- Kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$



- Kofaktorekspansjon

Eksempel

Reken ut disse determinantene

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{matrix} \begin{matrix} -2 & -4 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 12 & 23 \\ 0 & 7 & 7 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 23 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$7(12 - 23) = -77$$

Eller

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +11 \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot (0 - 7) = \underline{-77}$$

Eller "kryss og tvers"-regel for 3x3 matriser

(oppg. 15-18 i 3.1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \cdot 4 \begin{vmatrix} -7 & \pi \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-7) \cdot |2| = 1 \cdot 4 \cdot (-7) \cdot 2 = \underline{-56}$$

Poeng: For ei triangulær matrise er determinanten produktet av tala langs diagonalen.

Triangulær: Alle tala under eller alle tala over diagonalen er null.

Så hvorfor er $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibel?

Veit: A er invertibel om $A \sim I$.

$$\det I \stackrel{[?]}{=} 1 \neq 0$$

Har sett: Dersom $\det A = 0$, kan vi ikke radereredusere A til I med determinant 1.

Derimot, dersom $\det A \neq 0$, må den reduserte trappeform av A , som er triangulær,

ha gerne 1-tal langs diagonalen



Eksempel

Kva skal til for at dette linearsystemet har entydig løsning?

$$x_1 - x_3 + ax_4 = 4$$

$$2x_2 + 3x_3 = -4$$

$$2x_1 - 2x_2 + (a-5)x_3 + (2a+4)x_4 = 5$$

$$3x_1 - 3x_3 + (4a-1)x_4 = 0$$



- Kan skrives som $A\vec{x} = \vec{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & a-5 & 2a+4 \\ 3 & 0 & -3 & 4a-1 \end{bmatrix}$$

Veit: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibel $\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

- Entydig løsning uafhængig af leve $\vec{b}$ er.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & a-5 & 2a+4 \\ 3 & 0 & -3 & 4a-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot a(a-1) = a(a-1)$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ og } a \neq 1 \Leftrightarrow a \notin \{0, 1\}$$

Eintydig løsning hvis og herre hvis $a \neq 0$ og $a \neq 1$.

