

Forelesing 17/3

- ① Minne om frist for 2 leverer
Oblig 2 for 2. gang I dag kl. 14:00

- ② Fullføre eksempel om matrise-aritmetikk
(sjå notat frå 13/3)

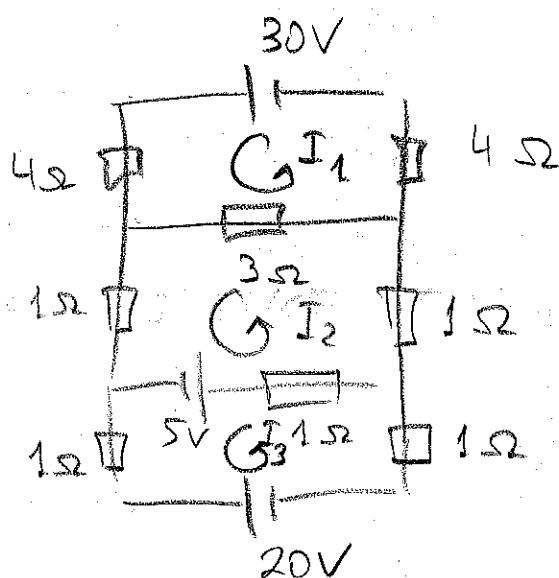
- ③ Definere transponering
(sjå notat frå 13/3)

④ Eksempel med strømkrins

Eksempel 2, s. 82 i læreboka

② Forvirring mellom maskestrøm og grein-strøm?

Eg: $\underline{I_2}$.



Maskestrømmer:

I_1, I_2, I_3

-vel retningane sjølv.

Spenningsfall over maske 1:

$$(4 + 3 + 4) I_1 - 3 I_2$$

-Skal vere like 30V (Kirchhoffs (over)).

Maske 2:

$$(1 + 1 + 3 + 1) I_2 - 3 I_1 - I_3 = 5,$$

$$-3 I_1 + 6 I_2 - I_3 = 5$$

Maske 3:

$$(1 + 1 + 1) I_3 - 1 I_2 = -20 - 5, \quad -I_2 + 3 I_3 = -25$$

Alt i alt:

$$11 I_1 - 3 I_2 = 30$$

$$-3 I_1 + 6 I_2 - I_3 = 5$$

$$-I_2 + 3 I_3 = -25$$

Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 & 30 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ 4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 21 & -4 & 50 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -3 \\ \leftarrow \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 21 & -4 & 50 \\ 0 & -57 & 11 & -145 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -57 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 21 & -4 & 50 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \\ 0 & 0 & -160 & 1280 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow -\frac{1}{160} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 21 & -4 & 50 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -3 \quad 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 21 & 0 & 18 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ 21 \leftarrow (-1) \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \leftarrow (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Alttså:

$$I_1 = 3A, \quad I_2 = 1A \quad \text{og} \quad I_3 = -8A$$

(mæskestrømmen I_3 går modsætt vej af
teilerings.)

Hvis tid: Kontrollere i MATLAB.

⑤ Beispiel

Lös diese Gleichungssysteme:

$$a) A \vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad b) A \vec{x} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

der $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Prüfung: - Für beide Gleichungen "i" erhält Jobs

Stör totalmatrize:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 1 & 6 & -10 \\ 2 & 1 & 2 & 10 & -10 \\ -1 & -1 & -2 & -9 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & -2 & -9 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -21 & 11 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -3 \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & -2 & -9 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ 2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \leftarrow (-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xleftarrow{(-1)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar (a):

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Svar (b):

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[?] Har definert følgende operasjoner mellom matriser:

Skalar-multiplikasjon

Sum/differanse

Produkt.

Kva "mangler"?

→ Divisjon

- Finst ikke

Det som leies understøttet:

Multiplikasjon med invers-matrise

⑥ Invertering (2.2)

For tal $5 - 3$ betyder egentlig

$5 + (-3)$ - addition med neg. tal

$5 : 3$ betyder egentlig

$5 \cdot \frac{1}{3}$ - multiplikation med
3-invers, 3^{-1}

Har: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ for alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
(0 har ingen invers)

Med matriser: Kve matrise, linear?
mest på 1?

- Identitetsmatris I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Diagonal med 1-tal langs diagonalen.

Generelt: $I \cdot A = A$ og $A \cdot I = A$

Eksempel

Vis at dette stemmer for $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

IA : For at dette skal gi mening, må
I ha to søyler.

-Vi mener altså I_2

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

Frå høgre, AI : Med " I " må vi mene I_3

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

Vi definerer inversmatrise til A :

Dersom det for ei $n \times n$ -matrise A
eksisterer ei matrise G som er
slik at $AG = GA = I_n$, seier
vi at A er invertibel, og
 G er inversmatrise, A^{-1} , til A .

- Vi definerar altså inversmatrisa berre for kvadratiske matriser - altså matriser som har like mange rader som søyler ($n \times n$)
- ~~Stett~~ ikke alle kvadratiske matriser har ei inversmatrise.
- Dersom matrise er invertibel, er inversmatrise unik.

Benytter dette siste

$$\text{Anta } A \cdot B = B \cdot A = I_n \text{ og } A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

$$C \cdot (A \cdot B) = C \cdot I = C \text{ og}$$

$$C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B \quad (\text{Teorem 2a s. 97})$$

$$\text{Altså: } C = B$$

□

Eksempel

Gitt at $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ er invertibel, finn A^{-1}

Skal finne X slik at $A \cdot X = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X = [\vec{x}_1 | \vec{x}_2]$, skal ha $[A \cdot \vec{x}_1 | A \cdot \vec{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Altså

$$A\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } A\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skaber totalmatrise:

$$[A|I_2] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot 3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow (-1) \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Altså } X = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Kontroll: } A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 - 5 & -2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \\ 3 - 3 & -5 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

$$A^{-1} A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - 5 & 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \\ -2 + 2 & -5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = I_2$$

Kan vise: Dersom A er invertibel og $AB = I$, er også $BA = I$.

Egentlig nok 2 kontrollerende tidt av produktene over.

Oppsummering av metode for å finne A^{-1} :

- Set opp totalmatrise $[A|I]$

- Reduser til vi har I til venstre, da vil vi ha A^{-1} til høyre;

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

[?] Føresetnad:

A kan reduseres til I ($A \sim I$)

Hvis ikke: A er ikke invertibel.

Eksempel

Bestem A^{-1} , dersom ko eksisterer, for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Totalmatrise:

$$[A|I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ingen leiende tal i søyle 3; A kan ikke reduceres til I_3 og er derfor ikke invertibel.

For 2×2 -matriser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

derfor $ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

derfor $ad - bc = 0$ A er ikke invertibel

I eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Eksempel

Finda matrisa X när

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 X^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = (X^T)^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Stek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -2 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

OK