

Forelesing 13/3

① Beskjeder?

-Om å "rive av seg håret"

② Oppsummere det siste frå sist:

$A\vec{x} = \vec{0}$ hadde løysinga

$$\vec{x} = \frac{x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

homogen
løn.

og $A\vec{x} = \vec{b}$ hadde løysinga

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\vec{p}$

med $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_h$

og $\vec{b}$

Generell løysing

spesiell løysing:

f. eks.

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Generelt: Hvis $\vec{u}_h$ er alle løysingar (den generelle løysinga) av $A\vec{x} = \vec{0}$, og $\vec{p}$ er ei spesiell løysing av $A\vec{x} = \vec{b}$, er dette den generelle løysinga av $A\vec{x} = \vec{b}$: $\vec{x} = \vec{p} + \vec{u}_h$

③ Om lineær uafhængighed

- Sjå notat fra 10/3

Påstand

Settet $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uafhængig



mindst en af vektorerne er en lineærkombination af de andre.

Bevis

Vi: Ligning

$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$ har ikke-trivielle løsninger; mindst en af x_i -ene kan være ulik 0. Om dette er x_1 :

$$x_1 \vec{v}_1 = -x_2 \vec{v}_2 - \dots - x_n \vec{v}_n$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \vec{v}_2 - \dots - \frac{x_n}{x_1} \vec{v}_n \quad (\text{OK fordi } x_1 \neq 0)$$

Altså: $\vec{v}_1$ er en lin.-komb. af $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ $\square$

Eksempel

Angiver om disse vektorane er lin. avh.:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3 vektorar i $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ lin. avh.

④ Matrise-multiplikasjon (2.1)

- Her sett matrise-vektor-produkt,

t.d.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \\ 7 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Skal no definere matrise-matrise-produkt,

$$A \cdot B$$

Eksempel

Følgende transformationer er givet

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ med } T(\vec{x}) = A\vec{x} \text{ og}$$

$$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ med } S(\vec{y}) = B\vec{y} \text{ der}$$

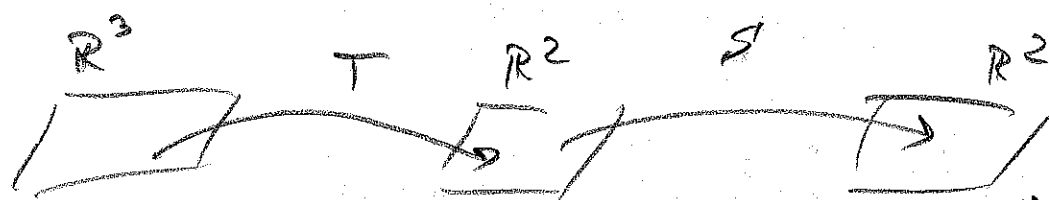
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Altså er A standardmatrise til T og B er standardmatrise til S .)

Man kan definere en ny transformation ved at sætte T og S sammen:

$S(T(\vec{x}))$. Find standardmatrise til denne.

—————



$$T(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad S(\vec{y}) = B\vec{y}$$

$$S(T(\vec{x})) = S(A\vec{x}) = B(A\vec{x})$$

$$\text{Vil ha: } S(T(\vec{x})) = \underset{\uparrow}{C} \vec{x}$$

standardmatrise til
den sammensatte trans.

eller

$$\begin{array}{c} \vec{x} \\ \boxed{A} \downarrow \\ \vec{y} = T(\vec{x}) \\ \boxed{B} \downarrow \\ S(T(\vec{x})) \end{array}$$

$$C = [S'(T(\vec{e}_1)) \mid S'(T(\vec{e}_2)) \mid S'(T(\vec{e}_3))]$$

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S(T(\vec{e}_1)) = S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$S(T(\vec{e}_2)) = S\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$S'(T(\vec{e}_3)) = B\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Altså:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -24 & 2 \\ 6 & 23 & 6 \end{bmatrix}$$

(Hvis tid: Vis at $u(\vec{x}) = S'(T(\vec{x}))$ er lineær hvis S og T er det)

$$\text{Altså: } B(A\vec{x}) = C'\vec{x}$$

↑

Rekkefølge har "alt" å sere; først skal A gangast med $\vec{x}$, og så skal B gangast med den vektoren vi da får.

Kva om vi kan gi blokken i parentesane?

$$B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x} = BA\vec{x}$$

↑

Produkt av matriser.

Korleis må vi definere BA da?

Skl ha $BA\vec{x} = C\vec{x}$ - for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

-Må ha like matriser; $BA = C$

Korleis bestemte vi C ?

Jo: $C = [B \cdot 1. \text{ søyle i } A \mid B \cdot 2. \text{ søyle i } A \dots]$

Definisjon av matriseproduktet:

Matriseproduktet AB er definert slik:

$$AB = [A\vec{s}_1 \mid A\vec{s}_2 \mid \dots \mid A\vec{s}_n]$$

der $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$ er søylene i B ;

$$B = [\vec{s}_1 \mid \vec{s}_2 \mid \dots \mid \vec{s}_n]$$

(?) Føresetnad:

$A\vec{s}_i$ er definert når A har like mange søyler som $\vec{s}_i$ har komponentar.

$\vec{s}_i \in \mathbb{R}^p \Rightarrow B$ har p rekker.

Dersom A er ei $m \times p$ -matrise, må B ha p rekker. Ellers er ikke produktet

definert.

Summar og skalar-multiplikasjon av matriser er mer "rett fram":

$A+B$ er gitt ved å summere element for element, cA er gitt ved å gange alle element i A med c .

Eksempel

Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

rekn ut $2A$, $A+B$, $3B-2C$, $A \cdot B$, $B \cdot A$ og $C \cdot A$ - for dei uttrykk som er veldefinerte

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$A+B$: A og B har ulike format, det går ikkje.

$$3B - 2A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 21 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & 0-4 \\ 21-6 & 6-(-8) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}}}$$

AB: A har 3 søyler, B har 2 rækker; går ikke.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Søyle 1: } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 7 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{Søyle 2: } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 \\ 21+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Søyle 3: } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 14 & 25 & 3 \end{bmatrix}}}$$

Merk: AB udef. og BA vedef.
- Rækkefølge har betydning!
 $AB \neq BA$

- Litt tungvindt

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & -1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 & -3 - 4 \cdot 5 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & -23 \end{bmatrix}}}$$

- Enklare

Evt. på ledd:

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & 3 & -1 \\ & 0 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 2 & & \\ 3 & -4 & & \end{array}$$

[?] Er dette da feil:

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 7 \cdot 3 & 2 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 21 & -8 \end{bmatrix}$$

Ja, dette er feil.

MATLAB: "*" betyr matrisemultiplikasjon

".*" betyr multiplikasjon element for element.

→ vise i MATLAB.

⑤ Transponering (2.1)

A^T : Det same som A - men med rader og søyler bytt om

Frå forrige eksempel:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[?] Dersom A er ei $m \times n$ -matrise, er A^T ei $n \times m$ -matrise

[?] Hva er $(A^T)^T$?
 $\rightarrow A$.