

Foredrag 10/3

① Oblig: Kan hentast i eftermiddag.

Ikke godkendt: Frist til 18/3 kl.

14:00 a levere på nybb - i
nylle udenfor levedores mitb.

Oblig 3 læst ud. Frist: 24/3 kl.
14:00.

② Om ulike måter a skrive
olukningssystem på. (Se s. 11 i notat
fra 6/3.)

③ Løysbarhet og løysingsrom

Eksempel

Løys desse tre likningssystema:

a)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 &= -3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 &= -9\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 &= -8\end{aligned}$$

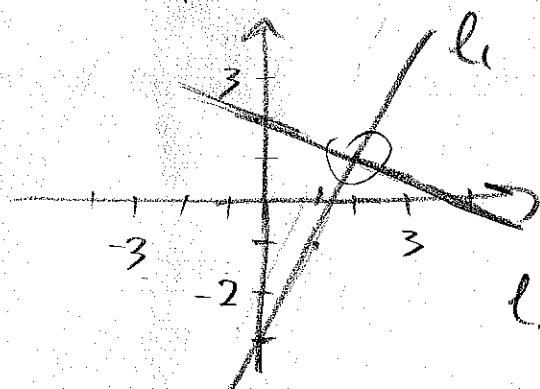
Fyrst: Ser geometrisk på det

[?] Kva blir mengde av alle pkt. i planet som oppfyller $x_1 + 2x_2 = 4$?

— Ei linje; $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 2$
($y = -\frac{1}{2}x + 2$)

Ei anna linje: $x_2 = +2x_1 - 3$

Løysing: Skjæringspunktet



Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xleftarrow{\frac{1}{3}} \sim$$

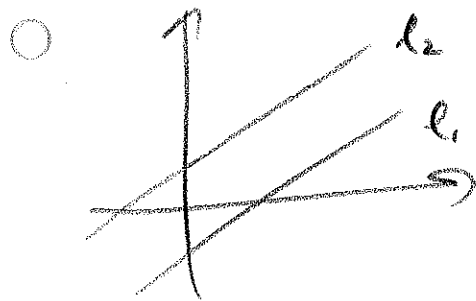
$$l_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xleftarrow{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Løsning: $x_1 = \frac{2}{3}$
 $x_2 = \frac{5}{3}$

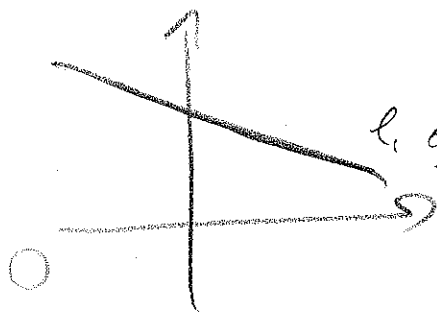
[?] Vil vi alltid få en løsning når vi har to likninger i to uavhengende?

- Nei

Geometrisk:



- ingen løsning



l_1 og l_2 ; de ligger oppå hverandre

- uendelig mange løsninger.

b) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nederste rad: $0x_1 + 0x_2 = -1$

- Fås ingen x_1, x_2 som oppfyller dette.

- Ingen løsning.

Generelt:

Dersom vi har eit leiande tal i søyle til høgre når totalmatrise er rekke redusert til treppetform, er likningssystemet inkonsistent; det har ikkje nok løysing.

9/ Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

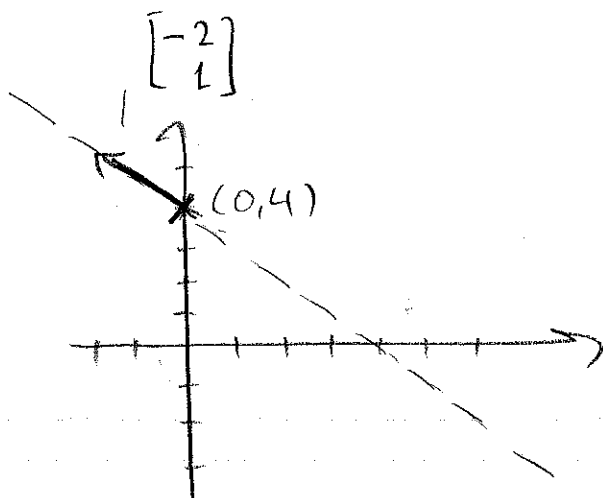
- Ingen informasjon i l. 2.
- Veit berre at $x_1 + 2x_2 = 4$

Løysing: $x_1 = -2x_2 + 4$

x_2 er fri

Løysingsmengd: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Parameterframstilling av ei linje gjennom $(4, 0)$ som er parallell med $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$



plan : rammet

[?] Kva skildrar dette: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$?

Tilsvarende geometriske sammenhengar

$\mathbb{R}^3$ — MATLAB-plot

(skript: PlotPlan.m)

Eksempel

Løys likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ der

1) $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

[Handwritten signature]

a) Totalmatrise:

$$[A|\vec{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 & 13 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -3 \\ \leftarrow -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \sim \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Ingen information;} \\ \text{" } 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \text{"}$$

Har:

$$x_1 - 2x_2 = 5, \quad x_1 = 2x_2 + 5$$

$$x_3 = 4$$

x_2 fri

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + 5 \\ x_2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

-Linje i rummet gennem $(5, 0, 4)$,
parallel med $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Totalmatrise:

$$[A|\vec{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{" } 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \text{"}$$

Inkonsistent.

Oppsummert:

Likningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning hvis og bare hvis der er et ledende tal i hver søyle i A når vi rekbereduserer matrisen til trappesform.

④ Homogene lineingsystem (1.5)

Eksempel

Løs disse lineingsystemer

a) $A\vec{x} = \vec{0}$ og b) $A\vec{x} = \vec{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[?] Oppenberr løsning i a)?

$\vec{x} = \vec{0} \leftarrow$ Triviell løsning

Totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

uendelig

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -6 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Alttså: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Parameterframstilling:

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Plan gjennom origo parallelt med $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Løysingsrom: $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

- mengde av alle lineærkombinasjoner

○ av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Totalmetode:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+2 \cdot 1 \\ \downarrow \\ \leftarrow}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

x_2, x_3 fri

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

løysinge fr^o a)

Generelt

Dersom $\vec{u}_h$ er den generelle løysinga av $A\vec{x} = \vec{0}$ og $\vec{p}$ er ei bestemt løysing av

$A\vec{x} = \vec{p}$, er den generelle løysinga av

$A\vec{x} = \vec{p}$ denne: $\vec{x} = \vec{p} + \vec{u}_h$

Homogen Inhomogen

⑤ Lineær uavhengighet (1.7)

Minner om hva ein lineærkombinasjon er: $\vec{u}$ er ein lin.-komb. av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dersom vi kan skrive

$$\vec{u} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n.$$

Definisjon

Eit sett av vektorar $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uavh. hvis løysinga

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

berre har den trivielle løysinga.

Altsp:

Den enaste måten å skrive $\vec{0}$ som
ein lin. komb. av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er
denne:

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n.$$

Eksempel

Avgi om desse vektorane er
lineært avhengige: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$

Løsning:

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = \vec{0} \quad \text{eller} \quad A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{der}$$

$$A = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -7-2 \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \frac{1}{3} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Altsp: } x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

x_3 er fri

$$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ikke-trivielle løysingar ($\vec{x}$ streng ikkje
vere $\vec{0}$). Vektorane er lineært avhengige.

Moral

Søylene i A er lineært uavhengig hvis og berre hvis det er eit leiande tal i kvar søyle når A blir redusert til trappeform.

[?] Dersom vi har 5 vektorar i $\mathbb{R}^4$,
kvi for må dei vere lineært
avhengige?

- Søyer i matrise: 4×5 -matrise.
- Maksimalt éitt leiande tal i kvar rekke - altså maksimalt 4.
- Kan ikkje vere leiande tal i kvar søyle (som det er 5 av).

Generelt

Om vi har P vektorar i $\mathbb{R}^n$ og $P > n$, er vektorene lineært avhengige.