

Førelsing 8/5

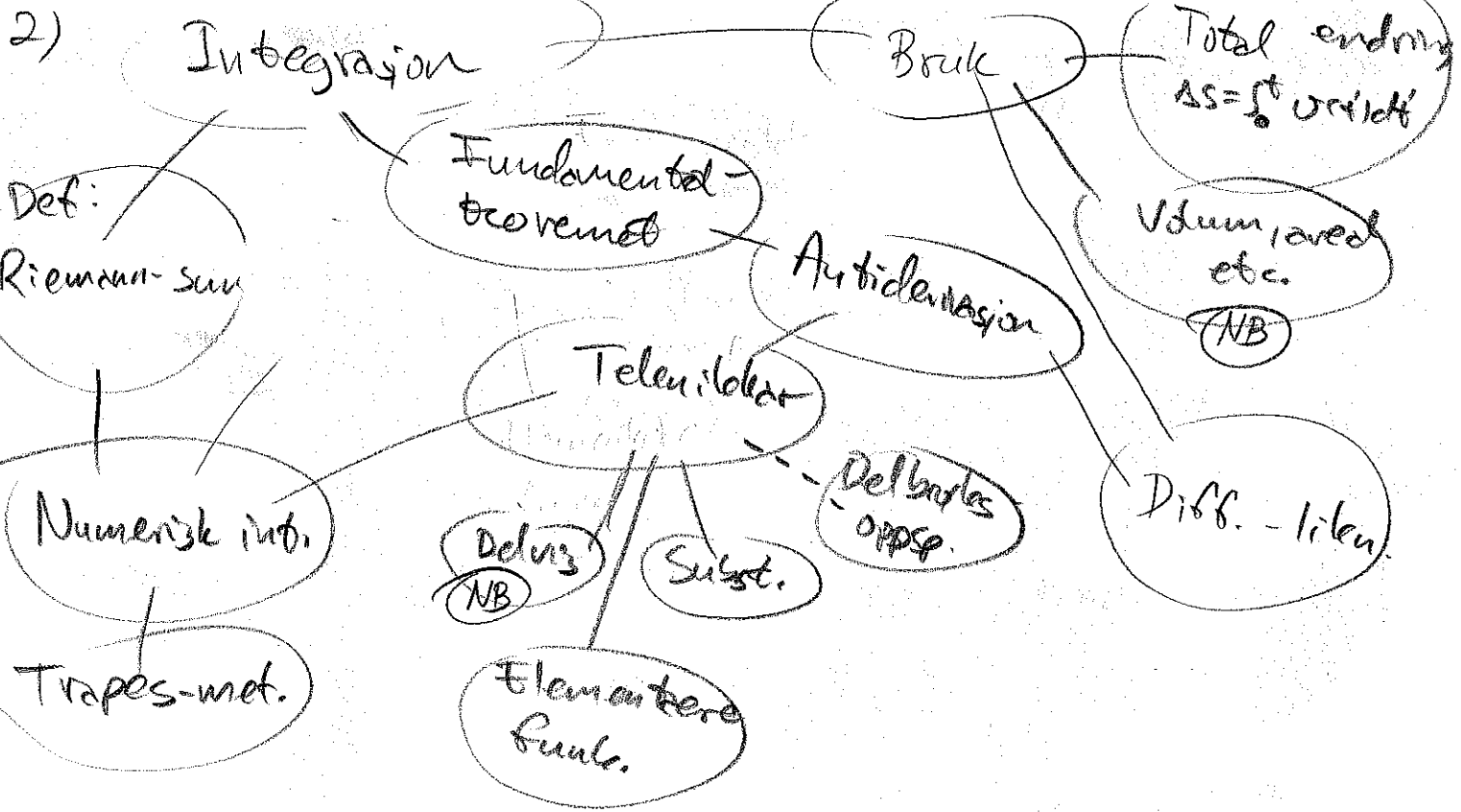
① Overflødig oversikt over det vi har vært gjennom.

Fine hovedtema (i tillegg til repetisjon i starten):

- 1) Derivasjon
- 2) Integrasjon
- 3) Differensialligninger
- 4) Lineær algebra

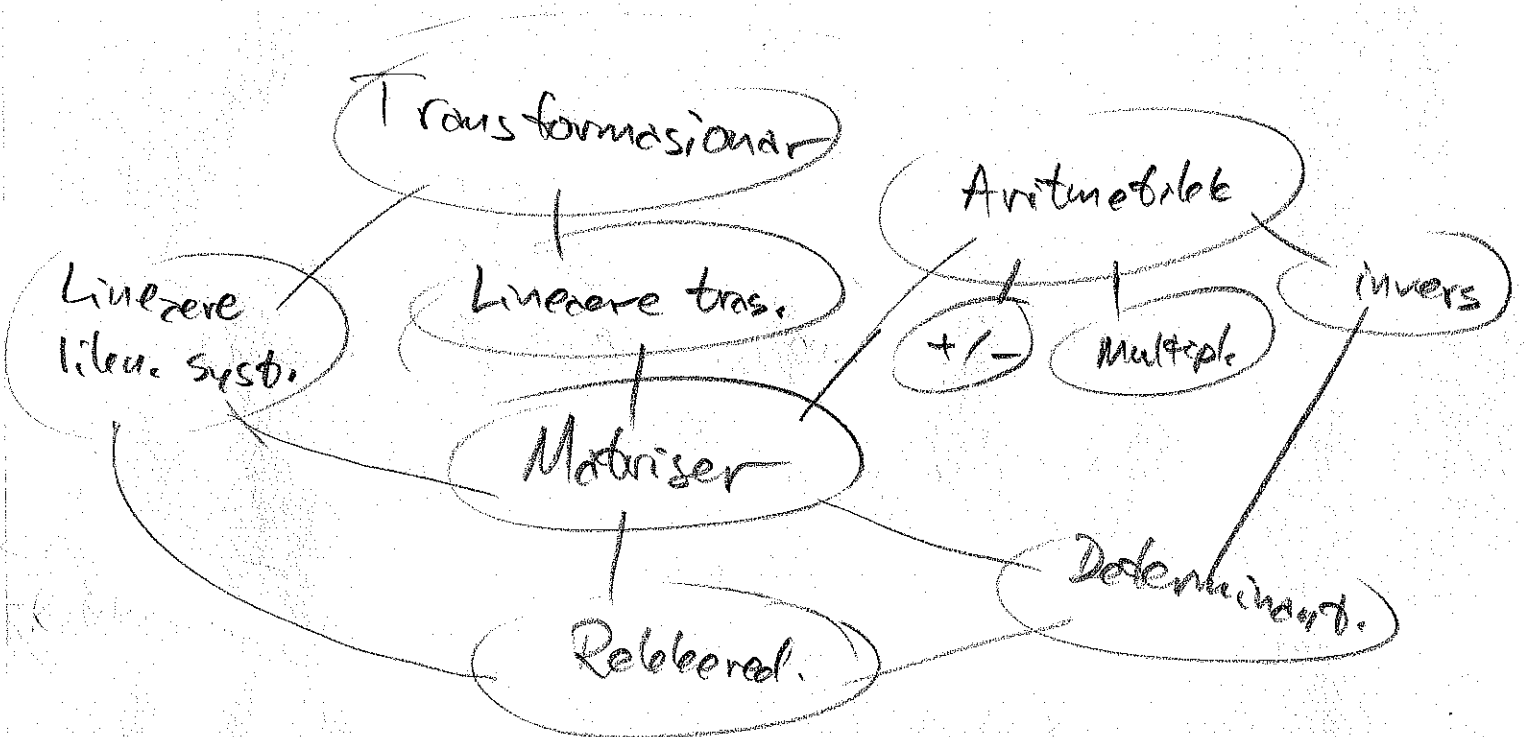
Tankekart





3) Diff-liken: Dette gjorde vi på mandag

4) Lineær-algebra



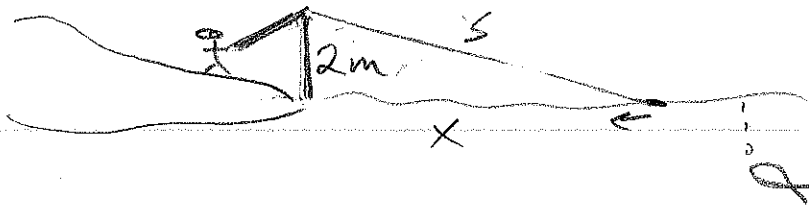
② - Repeterer to tema med derivasjon

Derivasjon: "Kople hastighet" og implisitt derivasjon.

- Delkapitlet om "kople hastigheter" er ikke pensum. Men vi er i stand til å rekne med slikt om vi kan leiereregelen.

Eksempel:

Des. 2013, oppg. 3



Sveivar inn: Både s og x er funksjoner av tide t .

Gitt: $s = 5$, $s' = -0.3$ (i m og m/s) [?] kva er $s' < 0$?

Pytagoras: $x^2 + 2^2 = s^2$

$$(x(t))^2 + 4 = (s(t))^2$$

Deriverar: $2x(t) \cdot x'(t) + 0 = 2s(t) \cdot s'(t)$

$$x \cdot x' = s \cdot s'$$

Når $s=5$ er $x = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$$\sqrt{21} \cdot x' = 5 \cdot (-0.3)$$

$$x'(t) = \frac{-1.5}{\sqrt{21}} \approx -0.327$$

Slutten nærmer seg land med farten
0.327 m/s.

Eksemen Juni 2011, oppg. 1 b) ii):

Finne y' når y er gitt ved

$$2xy^3 + y^2 + x^2 = 0$$

!NB! Ikke alle oppgåvene på dette
settet er relevante!

Deriverer implisitt, husk at y
er en funk. av x og bruk
kjerneregelen:

$$(2xy^3 + y^2 + x^2)' = 0$$

$$(2x)' \cdot y^3 + 2x \cdot (y^3)' + 2y \cdot y' + 2x = 0$$

$$2y^3 + 2x \cdot 3y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 2x = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \cdot y' + y \cdot y' + x = 0$$

$$(3xy^2 + y) y' = -x - y^3$$

$$y' = \frac{-x - y^3}{3xy^2 + y} = - \frac{x + y^3}{3xy^2 + y}$$

Skilnød:

Med leopk ført er både x og y (eller x og s) funksjoner av t .

Med implisitt deriv. er y en funk. av x - implisitt.

③ Litt om delvis integrasjon

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

- Døte uttrykk av typen

$$\int p(x) \sin(ax) dx, \int p(x) e^{ax+b} dx \text{ etc.}$$

der $p(x)$ er et polynom.

I så fall: Velg $u = p(x)$ og v' lite det andre (trigonometriske / eksponentiell-funk.)

- Med uttrykk av typen

$$\int p(x) \ln(ax+b) dx \text{ eller } \int p(x) \arctan x dx,$$

bør vi velge motsatt, $u' = \phi(x)$ og u lik det andre.

NB: Om vi ikke ser dette med en gang: Prøv deg fram og gjør det på den måten som fungerer!

Eksempel

Finn disse ubestemte integrala

a) $\int x^2 e^{2x} dx$

b) $\int x \arctan x dx$

a) $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$$v' = e^{2x} \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

Ny delvis int.:

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Vi får:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \left(\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + C'$$

$$\text{Sjekk: } \left(\frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + C \right)' = e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{2x} (2x - 1) = x^2 e^{2x}$$

$$b) u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$u' = x \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx \end{aligned}$$

Der erste integral ist: To mögliche wörter

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} \, dx - \int \frac{1}{x^2+1} \, dx \\ &= \int dx - \arctan x + C' = x - \arctan x + C' \end{aligned}$$

2) Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^2 : (x^2+1) = 1 - \frac{1}{x^2+1} \\ -(x^2+1) \\ \hline -1 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \dots$$

Vi für:

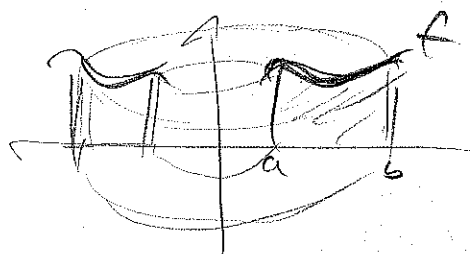
$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x + C') - \\ &\frac{1}{2} \arctan x (x^2+1) - \frac{x}{2} + C' \quad (C = -C'/2) \end{aligned}$$

$$\text{Siehe: } \left(\frac{1}{2} \arctan x (x^2+1) - \frac{x}{2} + C' \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+1} (x^2+1) + \right.$$

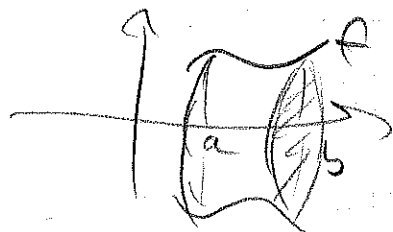
$$\arctan x \cdot (2x+0) - 1 + 0) =$$

$$\frac{1}{2} (1 + 2x \arctan x - 1) = x \arctan x \quad \text{Ok}$$

④ Volum av omdreings (elementar)



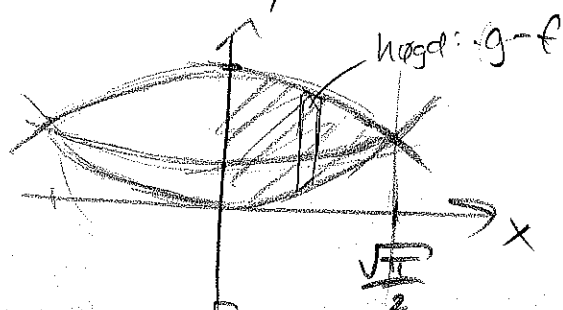
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (f \geq 0)$$



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Eksempel

Oppg. 6 fra eksamen aug. 2013



$$f(x) = \sin x^2$$

$$g(x) = \cos x^2$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot (g(x) - f(x)) dx = \\ &= \left(2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x g(x) dx - 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x f(x) dx \right) \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x (\cos x^2 - \sin x^2) dx \end{aligned}$$

Variabelbytte: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ slik at $dx = \frac{1}{2x} du$

$$V = 2\pi \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi/2})} x (\cos u - \sin u) \frac{1}{2x} du =$$

$$\pi \int_0^{\pi/4} (\cos u - \sin u) du = \pi [\sin u + \cos u]_0^{\pi/4} =$$

$$\pi \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) \right) = \pi \cdot \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \underline{\pi(\sqrt{2} - 1)}$$

(5) Fortsett med eksamen fra des. 2013.

