

Forelesing 9/1

① Praktisk info.

- Om du ikke har gjort det:
Installer MATLAB!
- Utlåns PG på reneøving. Men om du har laptop e.l.: Ta hun med!
- Fronter: Framdriftsplan, oppgaver, pensum m.m.
- Ikke tilgang? Nettside mi.

② Matlab på nettbrett?

② Kvadratsetningene

(sjå notat for 6/1)

③ Ulikskaper

Likning: Om to ting er like, er dei framleis like om vi gjer det same med dei.

Eksempel:

$$2x - 5 = 4x + 6$$

$$2x - 5 + 5 - 4x = 4x + 6 + 5 - 4x$$

$$-2x = 11$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{11}{-2}$$

$$x = -\frac{11}{2}$$

-Ikke så enkelt når vi skal løse ulikskaper...

Eksempel

$$2x - 5 < 4x + 6$$

$$2x - 5 + 5 < 4x + 6 + 5$$

$$2x < 4x + 11$$

$$2x - 4x < 4x + 11 - 4x$$

$$-2x < 11$$

-Deler på -2 : Må snu " $<$ " til " $>$ "

$$(-x < 5 \Leftrightarrow x > -5)$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{11}{-2}$$

$$x > -\frac{11}{2} \Leftrightarrow x \in (-\frac{11}{2}, \infty)$$

Verre: Når det ikke lenger relek i
berne "flytte over"

[?] Løsning?

Eksempel

$$-2x^3 + 20x + 3 > 2x + 3$$

Prøver Null på høyre side, faktorisering:

$$-2x^3 + 20x + 3 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x^3 + 18x > 0 \Leftrightarrow -2x(x^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x(x-3)(x+3) > 0 \quad (3. \text{ kvadratsetning})$$

For teilenskema:

	-3	0	3	
-2x				→
x-3				
x+3				
-2x(x-3)(x+3)				

Ser: $-2x(x-3)(x+3) > 0$ når $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$
($x < -3$ eller $0 < x < 3$)

Eksempel

Løys ulikskapen $\sqrt{x^2-1} < 3$

$\sqrt{y}$ berne veles; $\sqrt{y} < 3 \Leftrightarrow y < 9 \quad (y \geq 0)$

Altså: $\sqrt{x^2-1} < 3 \Leftrightarrow x^2-1 < 9$

Ma også levere: $x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

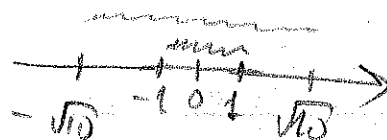


absoluttverdi

$$x^2-1 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 10 \Leftrightarrow$$

$$|x| < \sqrt{10} \Leftrightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$$

Løsning



$$x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10}) \setminus (-1, 1) = (-\sqrt{10}, -1) \cup (1, \sqrt{10}) = \{x \mid 1 \leq |x| < \sqrt{10}\}$$

Plottet i MATLAB

```
> x = -4:0.01:4;
```

```
> y = sqrt(x.^2 - 1);
```

```
> plot(x, y)
```

```
> hold on
```

```
> plot([-4 4], [3 3], 'k-')
```

```
> plot([-sqrt(10) sqrt(10)], [3 3], 'r0')
```

```
> hold off
```

- Diskutere $[-1, 1]$

[2] For funksjonen $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ - hva
x er ok?

Alle x slike at $|x| \geq 1$

Naturleg definisjonsmengd: $D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$
 $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

④ Funksjoner

[?] Kan en funksjon?

- Eksempel på funksjoner?

Funk.

argument

Porto

velte av brevet

Trykke i vann

dybde

⋮

[?] Kan en funk. vere avhengig av
fleire variable?

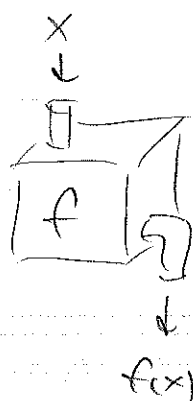
Ja

Definisjon

f er ein funk. av x dersom det for kvar x svarar maksimalt ein verdi for f .

f skal vere eintydig.

Funksjonsmaskin



[?] OK å få
ut ingen f for
ein x ?

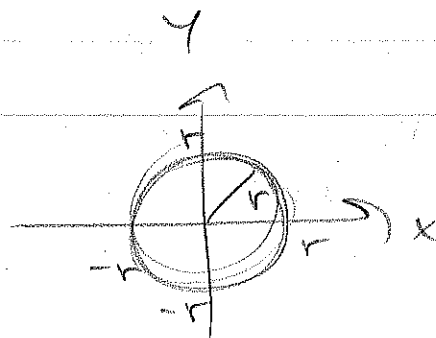
- Ja, av og til.

- Skal aldri få ut to $f(x)$ for ein x .

Liten. for sirkel:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



Ser: To y -verdier for kvar x -verdi
når $-r < x < r$.

(Ein når $x = \pm r$ og ingen når $|x| > r$.)

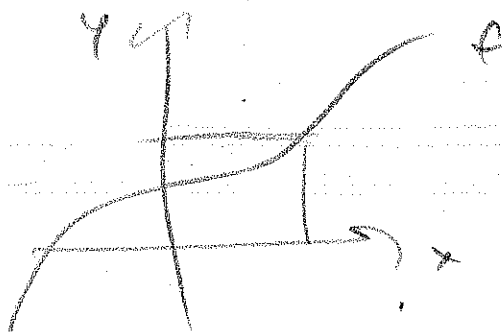
Altså: Her er y ikke ein funk. av x .
Sirkelen er ei kurve - ikke grafen til
ein funksjon.

Har sagt at en funksjon skal vere eintydig.

[?] Treng det da vere motsett og: ein y gir ein x ?

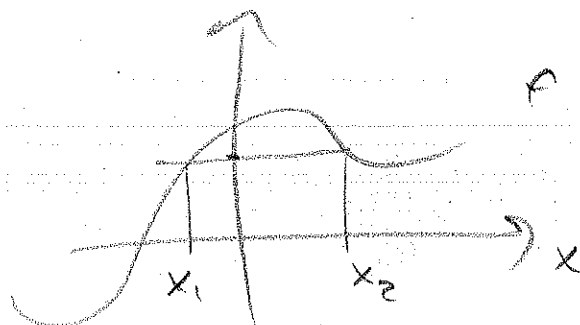
- Nei, slik treng det ikke vere. Men når det er slik, seier vi at f er ein-einetydig eller injektiv.

Ja



y

Nei



Altså: f er ein-einetydig når likninga $f(x) = y$ har maksimalt en løsning for alle y .

I så fall: $y = f(x)$ funk. av x

- og x er en funk. av y .

Denne funksjonen kallar vi den inverse funksjonen til f - $f^{-1}(x)$

NB! Betyr ikke $\frac{1}{f(x)}$!

(jmf. $\cos x$ og $\cos^{-1} x$.)

Eksempel

$\sqrt{2}$ krav?

Forklar hvorfor funk. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$

må vere ein-eitdydig, og bestem $f^{-1}(x)$

- Løser likninga $f(x) = y$ for x :

$$x + 2\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} - y = 0$$

innfører $u = \sqrt{x}$, $u^2 = x$

$$u^2 + 2u - y = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-y)}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+y}$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u \geq 0$$

- Må ta bort minusløsninga:

$$u = -1 + \sqrt{1+y}$$

$$\sqrt{x} = -1 + \sqrt{1+y}$$

$$x = (\sqrt{1+y} - 1)^2$$

- Eitdydig løysing: f er ein-eitdydig.

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y) = (\sqrt{1+y} - 1)^2$$

Byt navn:

$$f^{-1}(x) = (\sqrt{1+x} - 1)^2$$

I MATLAB?

2) Kva får vi når vi rekner ut $f(f^{-1}(x))$?

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f^{-1}(x) + 2\sqrt{f^{-1}(x)} = \\ (\sqrt{1+x} - 1)^2 + 2\sqrt{(\sqrt{1+x} - 1)^2} &= \\ \sqrt{1+x}^2 - 2\sqrt{1+x} + 1 + 2(\sqrt{1+x} - 1) &= \\ 1+x - 2\sqrt{1+x} + 1 + 2\sqrt{1+x} - 2 &= \underline{x} \end{aligned}$$

Også: $f^{-1}(f(x)) = x$:

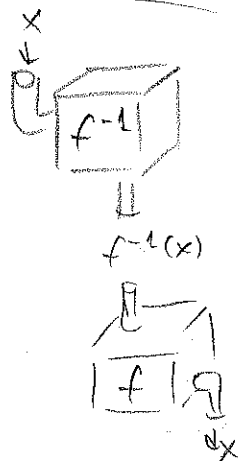
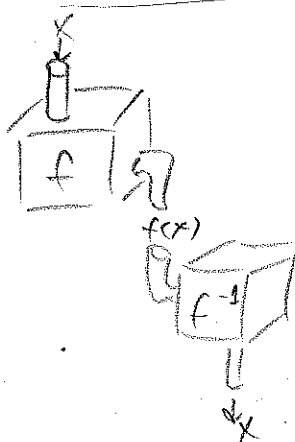
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= (\sqrt{1+f(x)} - 1)^2 = \\ (\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} - 1)^2 &= (\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} - 1)^2 = \\ (\sqrt{x} + 1 - 1)^2 &= \sqrt{x}^2 = x \end{aligned}$$

Slik er det alltid (når $f^{-1}(x)$ finst):

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

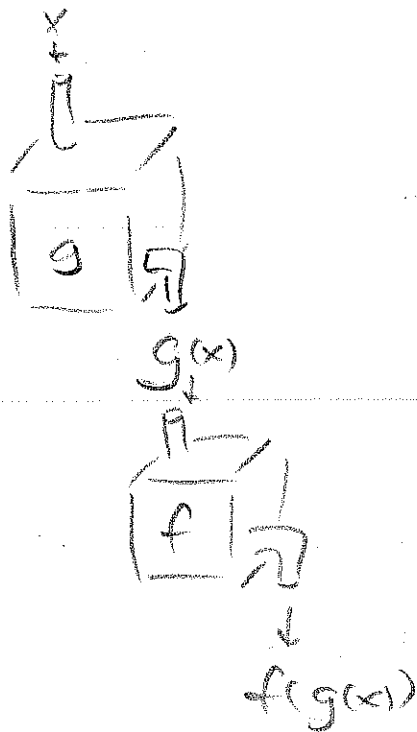


Sammensett funksjon



Generelt:

$f(g(x))$



Exempel

$$g(x) = x^2, \quad f(x) = \sin x$$

$$f(g(x)) = \sin x^2, \quad g(f(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

↑
kan leg
skrivemåte

Definitions- og verdimængde

For funkt. f :

Def.-mængde, D_f , er mængde af alle tal ein kan regne ut funkt.-verdien af.

Verdimængde, V_f , er mængde af alle funktions-
verdier vi kan få.

(?) Om f er forben til ein bil i
ei 60-sone?

Om f er diupet?

D_f kan angivesst "for hand".

Største moglege D_f for gitt f :

Naturlig definitions-mængde.

I eksempelet: $f(x) = x + 2\sqrt{x}$

Naturlig d.-m.: $D_f = [0, \infty)$

Eksempel

Gitt $f(x) = \sqrt{\sin x}$

bestem den naturlige def.-mengde til f .
Kva blir verdimengde?

$\sin x$ def. for alle $x \in \mathbb{R}$.

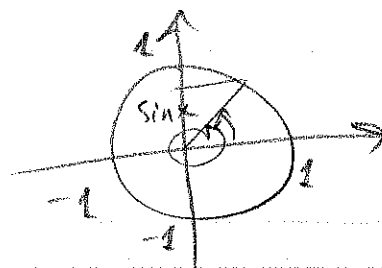
Men $\sqrt{y}$ er berre def. for $y \geq 0$.

Krav: $\sin x \geq 0$

I 1. omløp:

$$0 \leq x \leq \pi \quad (\text{i rad.})$$

$$(0 \leq x \leq 180^\circ)$$



Generelt: $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
partell \qquad \quad oddetall

Altså: $D_f = \{x \mid 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\} =$
 $\dots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \dots$

Veit: $\sqrt{y}$ kan bli 0, men aldri mindre.

$\sin x \in [-1, 1]$

$$V_f = [0, 1]$$

[?] Med $g(x) = x^2$, kva
er V_g ?