

Forelesing 30/1

① Beskjedar:

- Minne om utsettning av oblig.
- Presisering om fritak fra arbeidskrav.

② Eksempel med Taylor-polynom

(Notat fra 27/1)

③ Taylors formel med restledd

(Notat fra 27/1)

④ Numerisk derivasjon (igjen)

Spoiler alert...

To formler:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

og

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

[?] Erfaring fra numeriske-leksjoner

- Den siste er mest presis.

Kvifor?

Vi brukar teorien vi nettopp såg på.

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$P_2(x) = P_1 + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

$$\text{Feil: } f(x) = P_1(x) + R_1(x)$$

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2!} (x-a)^2, \quad c \text{ mellom } x \text{ og } a.$$

$$\text{La } x = a+h$$

$$\text{Vert: } f(a+h) = P_1(a+h) + R_1(a+h)$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{f''(c)}{2!} (a+h-a)^2$$

$$h \cdot f'(a) = f(a+h) - f(a) - \frac{f''(c)}{2!} h^2$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f''(c)}{2} h$$

↑

↑

"=", ikke "≈"

teilledd

Feilen er proporsjonal med h og avgrensas av $f''(c)$ der c ligg mellom $a+h$ og a .

For midtpunktsformelen:

$$f(a+h) = P_2(a+h) + R_2(a+h)$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(a+h-a)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (a+h-a)^3$$

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{1}{2} f''(a) h^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(c_1) h^3$$

Tilsvarende:

$$f(a-h) = f(a) - h f'(a) + \frac{1}{2} f''(a) h^2 - \frac{1}{6} f^{(3)}(c_2) h^3$$

c_1 mellom $a+h$ og a og c_2 mellom $a-h$ og a

Differanse:

$$f(a+h) - f(a-h) =$$

$$f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{1}{6} f^{(3)}(c_1) h^3 -$$
$$(f(a) - h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{1}{6} f^{(3)}(c_2) h^3) =$$
$$2 h f'(a) + \frac{h^3}{6} (f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)) \quad (\Rightarrow)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{12} (f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))$$

↑

Feil-ledd

? Hvor er $|\frac{h^2}{6} (f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))|$

(ofte) mindre enn $|\frac{h}{2} f''(c)|$?

Hvis h er liten, er h^2 mye mindre
(jmf. 0.1 og $(0.1)^2 = 0.01$)

Føresetnad her: f er (minst) 3 ganger
deriverbar.

Oppsummert med $h > 0$:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2} h f''(c), \quad c \in [a, a+h]$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6} h f^{(3)}(c), \quad c \in [a-h, a+h]$$

(Finst en c slik at $f'(c) = \frac{1}{2} (f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))$ ved
skjæringssetninga)

5) L'Hôpital's regel

Nyttig retningsregel for grenseverdier:

Dersom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ og grense-
verdien $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer eller $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \pm\infty$
når $x \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Gjeld også for ensidige grenser, når
 $x \rightarrow \pm\infty$ og når både $f(x)$ og $g(x)$ går
mot $\pm\infty$ når $x \rightarrow a$.

Eksempel

Bestem disse grenseverdiane ved å
bruke L'Hôpital's regel:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

I alle oppgavene: Brøk-uttrykk der både teller og nevner går mot 0.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = \underline{1}$$

[?] Hvorfor gjøre det så "tungvint" tidligere?

b) NB: Heritt ok å faktorisere og korte

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4x + 4)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{2x} =$$

$$\frac{2 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2} = \underline{0}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin 2x) \cdot 2}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2 \cos 0 = \underline{2}$$

Her har vi brukt L'Hôpital's regel to ganger.

Andre ganger må vi jobbe litt mer med uttrykket

Eksempel

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$$

a) Både tæller og nævner $\rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((x^2-4)^{1/2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2-4)^{-1/2} \cdot 2x}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{x^2-4})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2-4)^{-1/2} \cdot 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} - \text{det samme.}$$

Betre:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2}}$$

(funkt. er kont.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-4)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-0}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \sqrt{1} = 1$$

b) - Ikke nok en brøle i det hele.

$$\text{Men: } x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty \text{ og } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}}$$

Både tæller og nævner $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{1/x} - 1)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{1/x} - 0) \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Evt.: $u = \frac{1}{x}$, $u \rightarrow 0^+$ når $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u}{1} = 1$$

d) Om vi lugser at $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$:

Variablebyte: $u = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5u$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\frac{x}{5}})^x =$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^{5u} = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^u \right)^5 = \underline{e^5}$$

Logaritme:

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (1 + \frac{1}{x})^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln (1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln (1 + 5u)}{u} \quad \text{der } u = \frac{1}{x}$$

ser: $\ln (1 + 5u) \rightarrow 0$ når $u \rightarrow 0$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln (1 + 5u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(\ln (1 + 5u))'}{u'} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+5u} \cdot 5}{1} = \frac{\frac{1}{1+0} \cdot 5}{1} = 5$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \underline{e^5}$$