

Forelesing 27/1

① Info?

Utset oblig. til 3/2

Fritale? Gi beskjed!

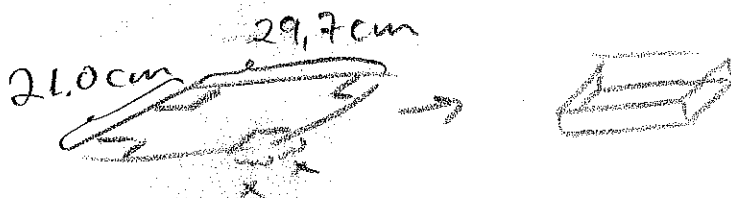
② To eksempel med effekten skillekeleg (sjå notat 23/1)

→ Andrederivert-testen?

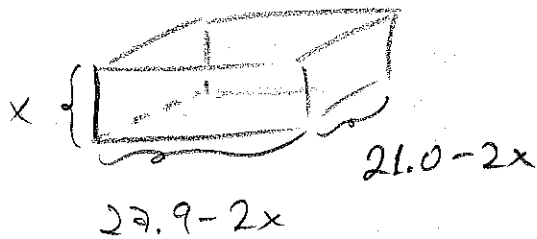
③ Uoppstilte optimeringsproblem

Eksempel

- Skal lage ein boks utan lokke av
eit A4-papir. - Kutter ut kvadrater i
kjørnene, brettar og taper



Kva for ein x gir optimalt volum?



Volum: $V(x) = x(27.9 - 2x)(21.0 - 2x)$, $D_V = [0, 10.5]$ ^[2]

$$= (27.9x - 2x^2)(21.0 - 2x) =$$

$$585.9x - 55.8x^2 - 42x^2 + 4x^3 =$$

$$4x^3 - 97.8x^2 + 585.9x$$

$$V'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 97.8 \cdot 2x + 585.9 =$$

$$12x^2 - 195.6x + 585.9 = 0$$

$$x^2 - 16.3x + 48.825 = 0$$

$$\therefore x \approx \frac{16.3 \pm 8.390}{2}$$

$$\frac{16.3 + 8.390}{2} = 12.345 \notin D_V$$

$$x = \frac{16.3 - 8.390}{2} = 3.955 \approx 4.0$$

Randpkt.: $V(0) = V(10.5) = 0$

Maximal for $x \approx 4.0$

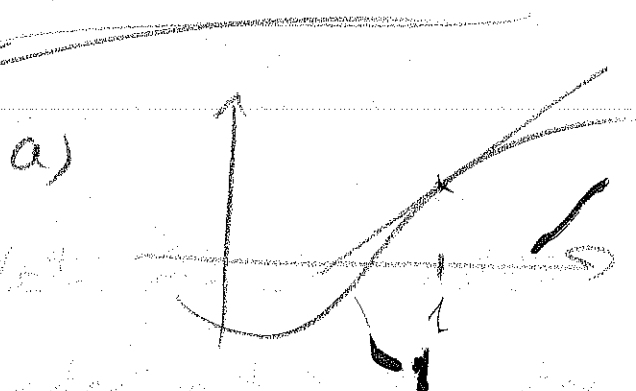
Kvadrata ser ha sider på 4.0 cm.

④ Lineær tilnærming (3.1)

For $f(x) = -0.2 + x \sin x$

a) Finn tangenten til $f(x)$ for $x=1$ og kall funksjonsuttrykket $P(x)$

b) Kor stor blir skilnaden mellom $f(x)$ og $P(x)$ for $x=1, 1.1, 0.9, 1.3, 0.7$?



$$\begin{aligned} f(1) &= -0.2 + 1 \cdot \sin 1 \\ &= \sin 1 - 0.2 \end{aligned}$$

Stigningsstol: $f'(1)$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

$$f'(1) = \sin 1 + 1 \cdot \cos 1 = \sin 1 + \cos 1$$

Lin. for linje gjennom (x_0, y_0) med stigningsstol a :

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - \underbrace{(\sin 1 - 0.2)}_{f(1)} = \underbrace{(\sin 1 + \cos 1)}_{f'(1)}(x - 1)$$

$$P(x) = (\sin 1 + \cos 1) \cdot x - \sin 1 - \cos 1 + \sin 1 - 0.2$$

$$= (\sin 1 + \cos 1)x - \cos 1 - 0.2$$

$$\approx 1.38x - 0.74$$

b) Opplagt: $P(1) = f(1)$; $f(1) - P(1) = 0$

$$P(1.1) - f(1.1) = \dots = -6.8 \cdot 10^{-4} = -0.00068$$

$$P(0.9) - f(0.9) = -1.7 \cdot 10^{-4}$$

$$P(1.3) - f(1.3) = -3.4 \cdot 10^{-3}$$

$$P(0.7) - f(0.7) = -0.024$$

$$P(1.5) - f(1.5) = 0.036$$

Poeng $\left\{ P(x) \approx f(x) \text{ når } x \approx 1 \right\}$

- Lineær tilnærming.

Generelt: $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

⑤ Newtons metode (3.4)

Vaustedag: Løse $f(x) = 0$, $-0.2 + x \sin x = 0$

② Metode? Halveringsmetoden $\rightarrow$ MATLAB - "quintessence"

Annan metode: Vi løser $P(x) = 0$ i

steden for $f(x) = 0$ - lett

$$1.38x - 0.74 = 0, \quad x = \frac{0.74}{1.38}$$

Men: Dette er jo ikke en løsning av $f(x) = 0$

Nei, men hva om vi gjør det en gang til - med $\frac{0.74}{1.38}$ i steden for 1?

- Og så en gang til etc.?

Vi itererar.

→ MATLAB "optimisation"

Generelt:

Tippar $x = x_0$, $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$P_1(x) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0) \Leftrightarrow x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{— kaller denne } x_1$$

$$\text{Gjentar: } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\text{Generelt: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

② Når sluttar vi?

Når $x_{n+1} \approx x_n$ — da har vi funne ei løsning.

Merke: Dette konvergerer fort!
(vanlegvis)

Algoritme:

- 1) Formuler liden. som $f(x) = 0$
- 2) Velg en x_0 du tror er i nærleiken
- 3) Iterer på $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ til
 $|x_{n+1} - x_n| < p$ der p er en
presisjon du har vald sjølv.
($p = 10^{-3}$ - t.d.).
- 4) x_{n+1} er da ei tilnærma løsning.

Poeng: Vi kan systematisk gjøre
feilen så liten vi vil.

- Sjå på skript.

⑥ Taylor - polynom (31)

Har sett: $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \approx f(x)$

når $x \approx a$ (f kan ikke vere for "rimsete").

Ser også $P(a) = f(a)$ og $P_1'(a) = f'(a)$

-Taylorpolynom av grad 1.

Taylor-polynom av grad n :

Dersom $f(x)$ er minst n ganger deriverbar på int. I ($a, x \in I$), er dette Taylor-polynom av grad n omkring $x=a$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k =$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n$$

! Faktet, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$f^{(k)}$: f derivert k ganger

Spesielt: $f^{(0)}(x) = f(x)$, $0! = 0^0 = 1$

Har:

$$f(a) = P_n(a), \quad f'(a) = P_n'(a), \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$$

- n -te-grads polynom som er mest m\u00f8gelig likt $f(x)$ n\u00e5r x ligg n\u00e5r a .

Poeng: Ofte enklare \u00e5 h\u00e5ndtere polynom enn andre typer funksjoner.

Eksempel

Bestem P_k med k fra 0 og med 1 til 5 for $f(x) = \sin x$, omkring $a=0$

$$a) \quad P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0)$$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$P_1 = 0 + 1 \cdot (x-0) = \underline{x}$$

$$P_2 = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 =$$
$$P_1 + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2$$

$$f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0$$

$$\Rightarrow P_2 = P_1 = x$$

Vidare:

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x-0)^3$$

$$f^{(3)}(x) = (-\sin x)' = -\cos x, \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$P_3 = x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-1) \cdot (x-0)^3 = \underline{x - \frac{1}{6} x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = +\sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0 \Rightarrow \underline{P_4 = P_3}$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x, \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= P_4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(0) (x-0)^5 = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 1 \cdot x^5 \\ &= \underline{x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5} \end{aligned}$$

Generelt: $P_{2n}(x) = P_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$P_{2n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

for $\sin x$

→ MATLAB-animasjon

Poeng: $P_n(x)$ er like $f(x)$ i et stadig større intervall når vi øker n .

Men: Dette er lite verd når vi ikke vet hvor stor feilen er.

Restledd

Dersom f kan deriveres $(n+1)$ ganger på int. I ($a, x \in I$) og $f^{(n+1)}$ er kont. på I :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{der}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad \text{der } c \text{ ligg}$$

mellom a og x.

Eksempel

Bruk eit 2 ordens Taylorpolynom til å estimere $\sqrt{101}$. Bestem også eit intervall som $\sqrt{101}$ må ligge i.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 100$$

$$f(100) = \sqrt{100} = 10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}, \quad f'(100) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-1/2-1} = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3}$$

$$f''(100) = -\frac{1}{4 \cdot 10^3} = -\frac{1}{4000}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(100) + f'(100)(x-100) + \frac{1}{2} f''(100)(x-100)^2 \\ &= 10 + \frac{1}{20} \cdot (x-100) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4000} (x-100)^2 = \\ &= 10 + \frac{1}{20} (x-100) - \frac{1}{8000} (x-100)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(101) &\approx P_2(101) = 10 + \frac{1}{20} (101-100) - \frac{1}{8000} (101-100)^2 = \\ &= 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} = \frac{80399}{8000} \approx 10.049875 \end{aligned}$$

$$\text{Feil: } f(101) - P_2(101) = R_3(101)$$

$$\text{der } R_2(101) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (101-100)^3, \quad c \in [100, 101]$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-3/2-1} = \frac{3}{8} x^{-5/2} = \frac{3}{8(\sqrt{x})^5}$$

$$f^{(3)}(c) = \frac{3}{8(\sqrt{c})^5}$$

$$R_3(101) = \frac{\frac{3}{8\sqrt{2}^5}}{3!} \cdot (101-100)^3 = \frac{1}{16\sqrt{2}^5}$$

$$C \in [100, 101]$$

$$R_3(101) \leq \frac{1}{16\sqrt{100}^5} = \frac{1}{16 \cdot 10^5} = \frac{1}{1600000} = 6.25 \cdot 10^{-7}$$

$$\sqrt{101} \in \left[\frac{80399}{8000}, \frac{80399}{8000} + \frac{1}{16000} \right] =$$

$$[10.049875, 10.049875625]$$

$$10.049875$$

$$\text{Numerisch: } \sqrt{101} \approx 10.0498756211$$

