

Foredlesing 23/1

① Praktisk info. ?

Oblig: Framside, hylle

NB: Ikke gallingend uten MATLAB

Om "MATLAB-hardkjør"

② Rep. derivasjonsregler:

$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (cf)' &= cf' \end{aligned} \right\} \text{-Lin.}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \text{- prod.-regel}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{- kvot.-regel}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(u(x)) : f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) \\ \frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned} \right\} \text{-kjerneregul}$$

③ "Smørgåsbord" av derivasjonsregler for elementære funk.:

$$(x^r)' = r x^{r-1} \quad [?] \text{ Kva for } r?$$

Alle også 0

Sært tilfelle: $1' = 0$

$$(e^x)' = e^x$$

Ved leierneregel:

$$a^x = e^{\ln a \cdot x}$$

$$(a^x)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)'}_1 = -\sin x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \dots = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

④ Eksempel med derivasjon

Deriver disse funksjonene:

$$a(x) = x^\pi$$

$$b(x) = 5 \sin x + e^x$$

$$c(x) = \sqrt{\tan x}$$

$$d(x) = \ln x^3 + \sin \sqrt{1+x^2}$$

~~-----~~

$$a'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

$$b'(x) = (5 \sin x + e^x)' = 5 \cdot (\sin x)' + (e^x)' = \underline{5 \cos x + e^x}$$

$$c(x) = (u(x))^{1/2} \text{ med } u(x) = \tan x$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{dc}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{1/2-1} \cdot (\tan x)' =$$

$$\text{deriver } \frac{1}{2} (\tan x)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\tan x} \cos^2 x}$$

$$\text{eller: } c'(x) = \frac{1}{2} (\tan x)^{-1/2} \cdot (1 + \tan^2 x) = \\ \frac{1}{2} ((\tan x)^{-1/2} + (\tan x)^{3/2})$$

$$d(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' + \cos \sqrt{1+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2})' =$$

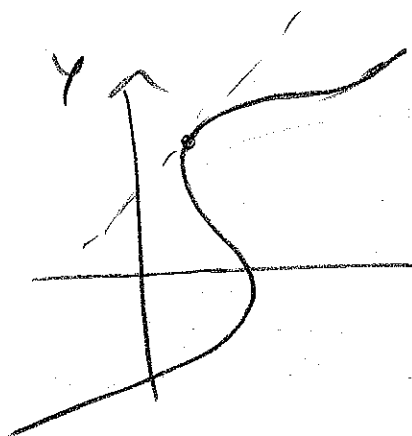
$$\frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 + \cos \sqrt{1+x^2} \cdot ((1+x^2)^{1/2})' =$$

$$\frac{3}{x} + \cos \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{1/2-1} \cdot (1+x^2)' =$$

$$\frac{3}{x} + \cos \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2 \sqrt{1+x^2}} \cdot 2x =$$

$$\underline{\underline{\frac{3}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos \sqrt{1+x^2}}}$$

⑤ Implisitt derivasjon



-kurve i planet;
ikke en funksjon.

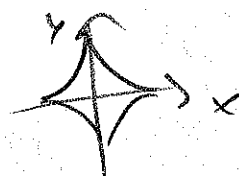
x (?) kan vi likevel
sukke om deriverte?

Ser: Ingen problem å teikne ein
tangentar i bestemte punkt. Og
ein slik tangent har jo eit
stigningsstal...

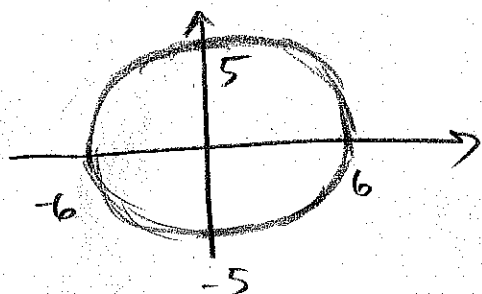
Eksempel: Superellipse $|\frac{x}{a}|^n + |\frac{y}{b}|^n = 1, n, a, b > 0$

$n=2$: Ellipse, $n=2$ og $a=b$: Sirkel

$0 < n < 1$: Stjerne:



Sergels torg, Stockholm: $a=6, b=5, n=2.5$



a) Vis at punktet
 $(\frac{3}{2}, 5 \cdot (\frac{3}{32})^{2/5})$ ligg på kurva.

b) Finn den deriverte i pkt.

a) Ser: $x, y > 0$ - vi kan droppe absoluttverdi-
teikna.

$$\text{Er } \left(\frac{x}{6}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{5}\right)^{2.5} = 1 \text{ for } x = \frac{3}{2} \text{ og } y = 5 \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^{2/5}?$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{6}\right)^{2.5} + \left(\frac{5 \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^{2/5}}{5}\right)^{2.5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{5/2} + \left(\left(\frac{31}{32}\right)^{2/5}\right)^{5/2} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^5 + \left(\frac{31}{32}\right)^{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{31}{32} = \frac{1}{2^5} + \frac{31}{32} = \frac{1+31}{32} = 1$$

OK

$$b) \left(\frac{x}{6}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{5}\right)^{2.5} = 1$$

Tenkjer oss at y er en funk av x
(det er ok "ldstb") og deriverer
begge sider:

$$\left(\left(\frac{x}{6}\right)^{2.5} + \left(\frac{y}{5}\right)^{2.5}\right)' = 1'$$

$$2.5 \cdot \left(\frac{x}{6}\right)^{2.5-1} \cdot \left(\frac{x}{6}\right)' + 2.5 \left(\frac{y}{5}\right)^{2.5-1} \cdot \left(\frac{y}{5}\right)' = 0$$

$$2.5 \left(\frac{x}{6}\right)^{1.5} \cdot \frac{1}{6} + 2.5 \left(\frac{y}{5}\right)^{1.5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{x}{6}\right)^{1.5} + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{5}\right)^{1.5} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{y}{5}\right)^{1.5} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} \left(\frac{x}{6}\right)^{1.5}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{6} \left(\frac{x}{6}\right)^{1.5}}{\frac{1}{5} \left(\frac{y}{5}\right)^{1.5}} = -\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5x}{6y}\right)^{1.5} = -\left(\frac{5}{6}\right)^{2.5} \left(\frac{x}{y}\right)^{1.5}$$

$$\text{I punktet: } \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{5}{6}\right)^{2.5} \left(\frac{\frac{3}{2}}{5 \cdot \left(\frac{31}{32}\right)^{2/5}}\right)^{3/2} \approx -0.1062$$

- Plotte i MATLAB

6) Optimering

- Har definert globale ekstremalpunkt.

Definisjon:

f har eit lokalt maksimalpunkt for $x=c \in D_f$ dersom det fins ei omegn U slike at $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in U \cap D_f$

- Tilsvarende for minimalpunkt.

Omgren: Ope intervall som inneheld c .

Hugar: $f'(x) > 0$: f aukar med x

$f'(x) < 0$: f aukar med x

Eksempel (s. 121 i læreboka)

a) Finn alle lokale ekstremalpunkt for

$$f(x) = x^3(x-1)^{2/3}, \quad D_f = [-1, 2]$$

b) Kva for nokre av desse er globale?

c) Kva ville svaret i b) ha vore dersom

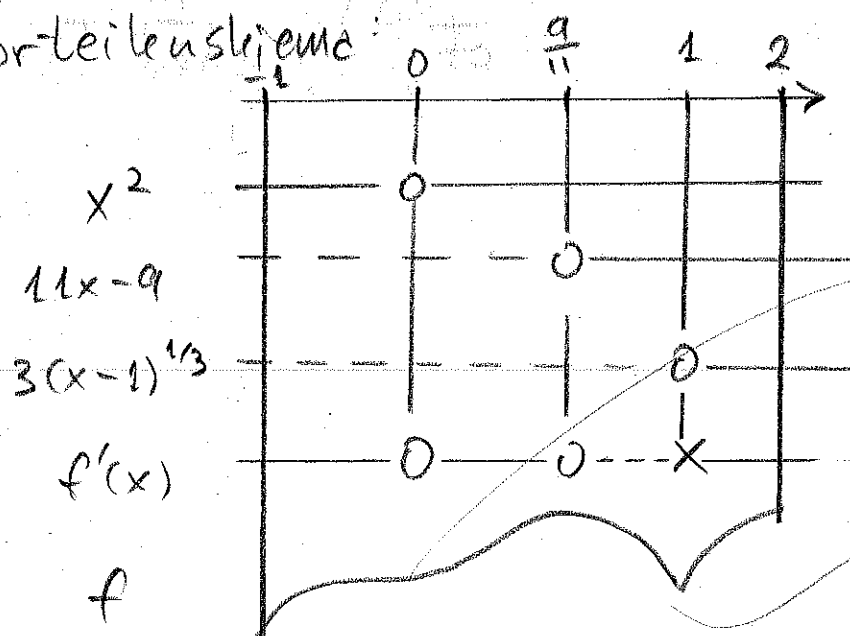
De hadde være $(-1, 2]$ - eller $[-1, \infty)$

~~-----~~

a) - Ser på den deriverbe:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \cdot (x-1)^{2/3} + x^3 \cdot ((x-1)^{2/3})' = \\ &= 3x^2 \cdot (x-1)^{2/3} + x^3 \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{2/3-1} \cdot (x-1)' = \\ &= x^2 \left(3(x-1)^{2/3} + \frac{2}{3} x (x-1)^{-1/3} \right) = \\ &= x^2 \left(3 \frac{x-1}{(x-1)^{1/3}} + \frac{2x}{3(x-1)^{1/3}} \right) = \\ &= x^2 \frac{9(x-1) + 2x}{3(x-1)^{1/3}} = x^2 \frac{11x-9}{3(x-1)^{1/3}} \end{aligned}$$

For-teileusliema:



Ser:

- Ingen topp/botn
sjølv om $f'(x)=0$
for $x=0$

- Botn for $x=1$
sjølv om $f'(x)$
ikke eksisterer

Ser: Topper for $x = \frac{9}{11}$ og $x = 1$

Botn for $x = -1$ og $x = 1$

$$f(-1) = (-1)^3 (-1-1)^{2/3} = -\sqrt[3]{4} \approx -1.587$$

$$f\left(\frac{9}{11}\right) \approx 0.176$$

$$f(1) = 1^3 \cdot (1-1)^{3/2} = 0$$

$$f(2) = 2^3 \cdot (2-1)^{3/2} = 8$$

Toppunkt: $(\frac{9}{11}, 0.176)$ og $(2, 8)$

Bottpunkt: $(-1, -\sqrt[3]{4})$ og $(1, 0)$

b) Globalt: Ser svaret direkte av f -verdien:

Globalt max.: $(2, 8)$

Globalt min.: $(-1, -\sqrt[3]{4})$

c) Med $D_f = (-1, 2]$

$(-1, -\sqrt[3]{4})$ ikke lenger med; ikke
noko minimalpunkt.

[?] Er da $(1, 0)$ globalt?

Nei, vi kan finne mange x som
er slike at $f(x) < 0$.

Vi har ikke noko globalt min. her.

[?] Er dette i konflikt med ekstremal-
verdi setninga?

Nei, denne gjeld for lukket int.

Med $D_f = [-1, \infty)$: $f \rightarrow \infty$ når $x \rightarrow \infty$;

ikke noko globalt max.

Oppsummert

Lokal ekstremalpunkt:

Anten a) Randpkt.

b) Kritiske pkt.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{eller} \\ f \text{ eksisterer ikke} \end{cases}$$

Andre deriverttesten

For $f'(c) = 0$:

$f''(c) < 0 \Rightarrow$ maksimalpkt. for $x=c$

$f''(c) > 0 \Rightarrow$ minimalpkt. for $x=c$

Bevis

$$f'(c) = 0 \quad \text{og} \quad f''(c) < 0$$

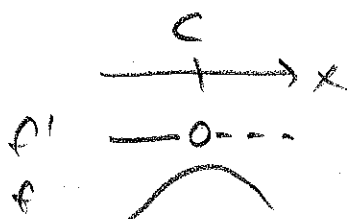
$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

- Må ha omgitt u omkring c der $\frac{f'(c)}{x-c} < 0$

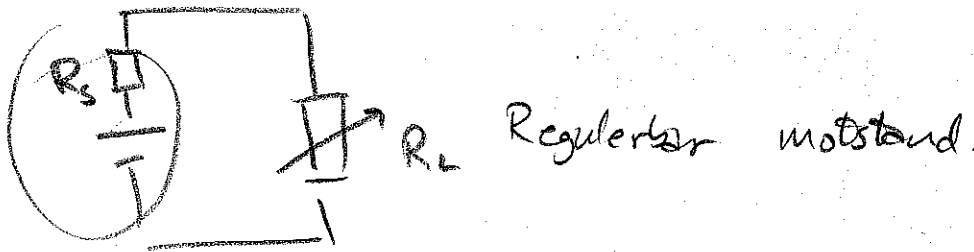
$$x > c : \frac{f'(c)}{x-c} \cdot (x-c) < 0 \cdot (x-c), \quad f''(c) < 0$$

$$x < c : f''(c) > 0$$

Maksimum



Eksempel



Litespenningekilde

med indre motstand R_s og spenning V

Effekt i motstand:

$$V = I(R_s + R_L)$$

$$P(R_L) = I^2 R_L = \frac{V^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

Kva motstand gir optimal effekt?
(V og R_s gitt)

$$P'(R_L) = V^2 \cdot \frac{d}{dR_L} \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2} =$$

$$V^2 \frac{1 \cdot (R_s + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_s + R_L) \cdot 1}{(R_s + R_L)^4} =$$

$$V^2 \frac{(R_s + R_L)((R_s + R_L) - 2R_L)}{(R_s + R_L)^4} = V^2 \frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3}$$

$$P'(R_L) = 0 \text{ for } R_L = R_s$$

Topp eller botn?

$$P''(R_L) = V^2 \frac{-1(R_s + R_L)^3 - (R_s - R_L)3(R_s + R_L)^2 \cdot 1}{(R_s + R_L)^6}$$

For $R_L = R_S$:

$$P''(R_S) = -V^2 \frac{(2R_S)^3}{(2R_S)^6} = -\frac{V^2}{8R_S^3} < 0$$

- Lokalt maksimalpunkt

Globalt?

$$R_L = 0 \quad \text{giver} \quad P = 0$$

$$P(R_S) = \frac{V^2 R_S}{(R_S + R_S)^2} = \frac{V^2 R_S}{4R_S^2} = \frac{V^2}{4R_S} > 0$$

$$\lim_{R_L \rightarrow \infty} P(R_L) = \lim_{R_L \rightarrow \infty} \frac{V^2 R_L}{(R_S + R_L)^2} = 0$$

Maksimalpunktet er globalt.

Maksimalt effekt for $R_L = R_S$.

