

Förel. 20/1

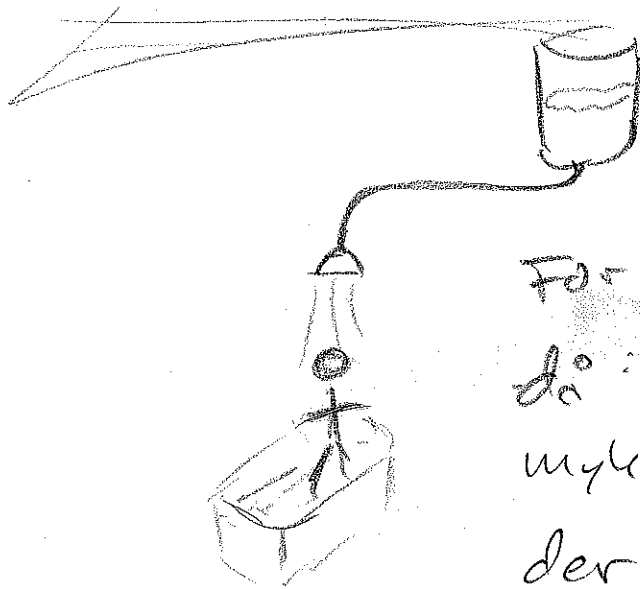
① Proletisk info:

- Alle på Fronten no?
- Oblig 1 ute

② Ekstreml verdisetninga

- Sid notat frå 16/1

③ Den deriverte



Før leumfort - der og
da: Interessert i hvor
mykje vatn som renn
der og da - hvor

fort det renn.

Ikke interessert hvor mykje som
vatn renne.

Om $V(t)$ er vassmengde i badekaret.

Interessert i $\frac{\Delta V}{\Delta t}$

Δ , stor delta: Endring

Ikke interessert i ΔV for $\Delta t = 1 \text{ min}$
- eller $\Delta t = 10 \text{ s}$. Nei, Δt skal vere
så liten som mogeleg

- Den deriverte: $V'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$,

$$\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$$

Tilsvarende med Sillekøring, t.d.:

Om du har kørt s km efter t timer, er gennemsnittsfarten

$$\bar{v} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}, \text{ og farten}$$

$$v(t) = S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Definition

Den deriverte til en funk. f er defineret: Sam

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dersom grenseverdien eksisterer for $x=a$,
Seier vi at f er deriverbar i
punktet a .

Alternativt: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Om en funk. er deriverbar, er
den også kont.

Viser dette:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se: $x - a \rightarrow 0$ Difor: $f(x) - f(a) \rightarrow 0$ når
 $x \rightarrow a$, ellers vil ikke grensa vere vddet.

Altså: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (def. av kont.)

Eksempel

Finne den deriverte av $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ Triks
 $\downarrow$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Veit: Her drøsseris av derivasjonsregler.

Nåre generelle:

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
 $(c f(x))' = c f'(x)$ } linearitet

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ - produktregelen

$f(x) = g(u(x))$: $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$
 Leibniz-notasjon: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ } kjerneregelen

$\frac{df}{dx}$ betyr det samme som $f'(x)$

$df \sim \Delta f$ - men "uendelig liten"

Fordel: Spesifiserer hva vi deriverer i forhold til.

Fleire variabler, $f(x, y)$: $f'(x, y)$ meningsløst.

Eksempel

Brukk produktregelen til å bevise kvotientregelen: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Definerar $h = \frac{1}{g} \Leftrightarrow g = \frac{1}{h} \quad (g, h \neq 0)$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = (f \cdot h)' = f' \cdot h + f \cdot h'$$

$$(2) \quad g \cdot h = 1$$

$$(g \cdot h)' = 1'$$

$$g' \cdot h + g \cdot h' = 0$$

$$h' = -\frac{g' \cdot h}{g} = -\frac{g' \cdot \frac{1}{g}}{g} = -\frac{g'}{g^2}$$

Set inn:

$$(f \cdot h)' = f' \cdot h + f \cdot h'$$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g}{g^2} - \frac{f g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Eksempel

a) Vis at $(x^2)' = 2x$

b) Vis at $(\sin x)' = \cos x$

c) Bruk dette saman med leierne regelen til å finne $(\sin x^2)'$

a) Med $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = \underline{2x}$$

Generelt: $(x^r)' = r x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Hugstør: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) =$$

$$\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

sett for...

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} =$$

$$- 1 \cdot \frac{0}{\cos 0 + 1} = 0$$

$$(\sin x)' = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \underline{\cos x}$$

c) Lad $f(x) = \sin x^2$

med $u(x) = x^2$: $f(x) = \sin u(x)$

Kjernerregel: Hvis $f(x) = g(u(x))$:

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

Her: $g(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos u \cdot u'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Leibniz-notasjon:

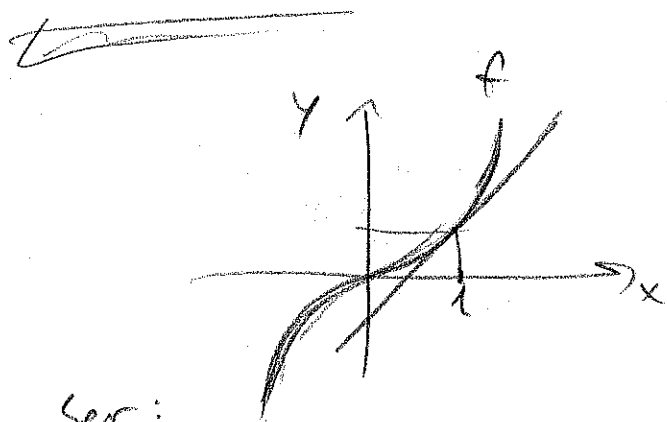
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = \underline{2x \cos x^2}$$

- Skemne $u(x)$ eksplisitt?

Er det? Hvis du synes det blir enklere da: Ja.

Eksempel

Finne likninga for tangenten til funksjonen $f(x) = x^3$ i punktet $(1, 1)$.



Ser:

Linje $\approx f$ når $x \approx 1$

Stigningstal: $f'(1)$

Likning: $y - y_0 = a(x - x_0)$

$$a = f'(1), (x_0, y_0) = (1, 1)$$

$$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$y - 1 = 3(x - 1), y = 3x - 2$$

④ Numersk integrasjon

- Slekt ikke alltid at en funksjons-sammenheng er gitt som et eksplisitt funksjonsuttrykk - og langt mindre et elementært uttrykk.
- Det kan vere tale om ein tabell, t.d.

Eksempel

Ein har logga kor langt ein bil har køyrd for levart minutt:

tid (min.)	0	1	2	3	4	5
dist. (km)	0	1.1	2.0	3.1	4.4	5.9

Etter beste evne:

a) Bestem farten ved $t = 2$ min.

b) ————— $t = 2.5$ min.

Veit : Farten $v(t) = s'(t)$, s : strekning

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

„Hopp“ Med h passe liten: $v(t) \approx \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$

Altså: $v(2 \text{ min}) \approx \frac{s(2 \text{ min} + 1 \text{ min}) - s(2 \text{ min})}{1 \text{ min}} =$

$$\frac{3.1 \text{ km} - 2.0 \text{ km}}{1 \text{ min}} = \frac{1.1 \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} = \underline{66 \text{ km/h}}$$

Men: h bring ildete vere positiv:

$$v(2 \text{ min}) \approx \frac{S(2 \text{ min} + (-1 \text{ min})) - S(2 \text{ min})}{-1 \text{ min}} =$$

$$\frac{S(2 \text{ min}) - S(2 \text{ min} - 1 \text{ min})}{1 \text{ min}} = \frac{(2.0 - 1.1) \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}}$$

$$= 60 \cdot 0.9 \text{ km/h} = \underline{54 \text{ km/h}}$$

Gjennomsnitt:

$$v(2 \text{ min}) \approx \frac{66 + 54}{2} \text{ km/h} = \underline{60 \text{ km/h}}$$

Generelt: $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

eller $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$

eller $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

→ leksjon 6

[?] Kva er best?

b) Har ildete $S(2.5 \text{ min})$

Men: Vi har $S(2.5 \text{ min} + 0.5 \text{ min})$ og

$S(2.5 \text{ min} - 0.5 \text{ min})$

-Brukar midtpunktsformel med $h = 0.5 \text{ min}$

$$v(2.5 \text{ min}) \approx \frac{S(2.5 \text{ min} + 0.5 \text{ min}) - S(2.5 \text{ min} - 0.5 \text{ min})}{2 \cdot 0.5 \text{ min}} =$$

$$\frac{3.1 \text{ km} - 2.0 \text{ km}}{1 \text{ min}} = 66 \text{ km/h}$$

