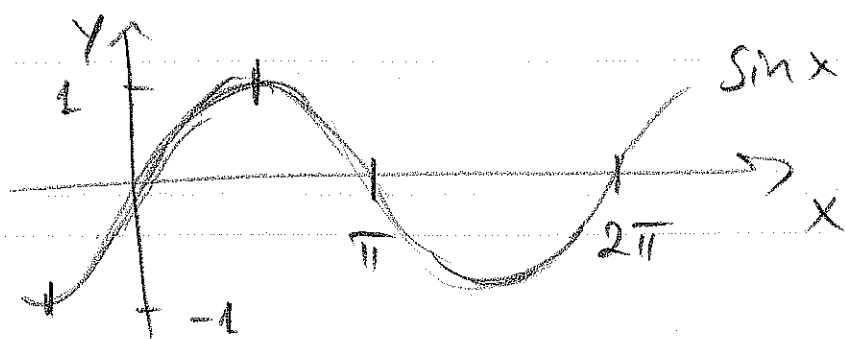


Forelesing 16/1

① Praktisk / iNB:

- Repetisjon: Link til oppfriskingskurs
- Rep. -forel mandag: Velstar mellom opplegg for dykt og for bygg/E&M
Spør Ivar Johannesen for mer evt.
- Oblig 1 lagt ut. Frist: 31/1.
NB: • Må giere numerikk for a. a.
gødkjend.
• Alle obligar skal vere gødkjende
- Fronter: Tidlegare gitte eksamenar.

② Mer om trig. funkt. (1.4)



Def.-mengd: $\mathbb{R}$

Verdimengd: $[-1, 1]$

Injektiv?

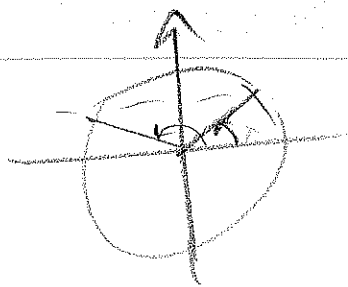
Nei

[?] Korteis kan vi då snakke om $\sin^{-1} x$?

- Avgrensa definisjonsmengd: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\uparrow$
 $\arcsin x$

Av einings sirkelen ser vi



$$\sin x = y \Leftrightarrow$$

$$x = \arcsin x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller}$$

$$x = \pi - \arcsin x + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

For $\cos x$:

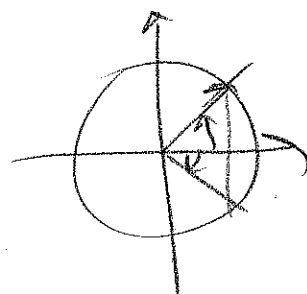
Def.: $[0, \pi]$

Verdim.: $[-1, 1]$

$$x = \arccos x + n \cdot 2\pi$$

eller

$$x = -\arccos x + n \cdot 2\pi$$



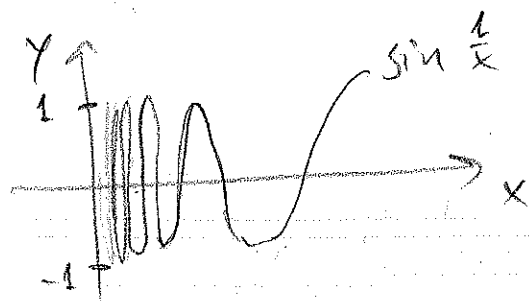
③ Grenseverdier (2.2)

Eksempel fra notat 8.1 13/1

Når grenseverdien ikke eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-2} : \text{Går mot } \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} : \text{Går ikke mot noe som helst.}$$



Skriv: "Grenseverdien eksisterer ikke fordi..."

høreboka: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{|x-2|} = +\infty$

Einsidige grenser

Påstod på mandag:

$$\text{For } f(x) = [\ln(2 - \sqrt{x+2})]^2, \quad D_f = [-2, 2)$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

Feil, [?] Kvi for?

$f(x)$ udef. for $x > 2$

Meinte:

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

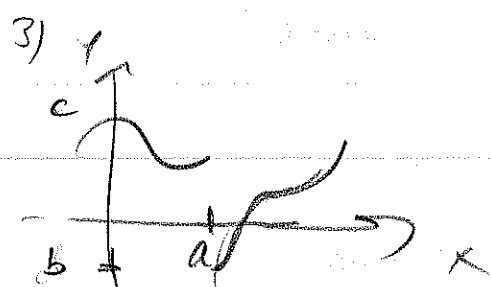
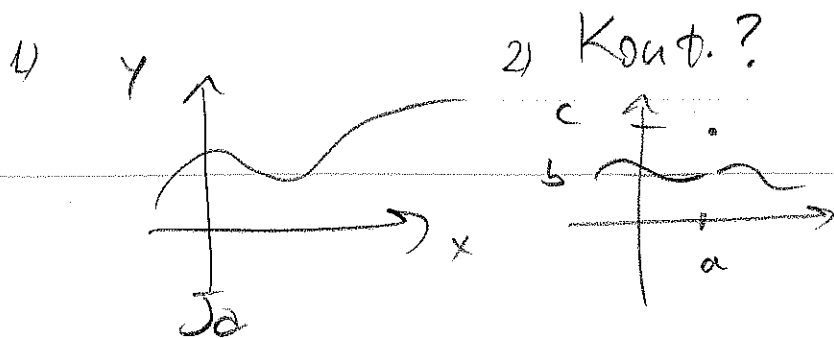
↑

går mot 2 fra nedsida

Tilsvarende: $x \rightarrow 2^+$ betyr at $x \rightarrow 2$
fra oppsida.

Molek-eksempel: Molekylengde $\rightarrow 0^+$

④ Kontinuitet (2.5)



Nei, ikke for $x=a$

Intuitivt: Kan tegne grafen uten å
brøte blyanten fra papiret.

Mer presist:

f er kont. i pkt. $a \in D_f$ hvis, og berre hvis,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

1) OK, nærmer seg fra for alle a

2) $f(a)=c$, men $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

Grense-verdien $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ er ikke definert.

Derfor kan ikke kravet bli oppfylt.

Hugar:

Alle elementære funksjoner er kont.
der, dei er def.

Derfor: $\lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2$

- Rei innsetting

Når dei er veldefinerte, kan vi også
sette inn rene grenseverdier:

Derfor f er kont for $b \in D_f$ og $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

↑

læreboka: " $f \circ g(x)$ "

Exempel

Bestem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}$ og $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{1}{1^2} = \underline{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0$$

- Sin⁰ rekureglor 2.29, s. 75.

Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ ^{delt} _{førskrift}

er f kontinuert?

For $x \neq 0$: Ja (elementære funk.)

Ser på $x=0$:

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x^2) = 1-0^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ er veldefinert og like 1,

som er det samme som $f(0)$.

f er kont. også for $x=0$.

⑤ To setninger (2.5)

Ekstremalverdier

Dersom $f(a) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$, er $(a, f(a))$ et globalt maksimumspunkt for f .

- Tilsvarende for minimumspunkt.

Ekstremalverdiene.

Dersom $f(x)$ er en kont. funk. definert på $[a, b]$, vil f ha både maksimum- og minimumspunkt på $[a, b]$.

Eksempel

Kva ekstremalpunkt har vi her:

$$f(x) = x^2, \quad D_f = [-2, 2]$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_g = (-1, 1)$$

f : Maks. for maksimal $|x|$, min. for $x=0$

Minimum: $(0, 0)$, maksimum: $(\pm 2, 4)$ (2 stl.)

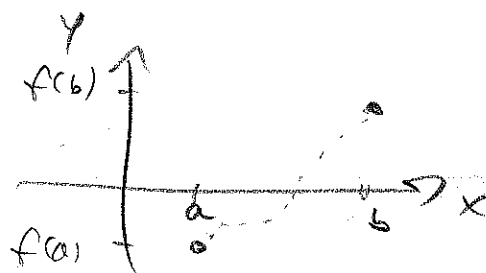
g : $x \rightarrow -1^+$ eller $x \rightarrow 1^-$: $g \rightarrow +\infty$

- Ingen øvre grense Minimum: $(0, 1)$

Skjæringssetninga

Dersom f er kont. på $[a, b]$ og $f(a)$ og $f(b)$ har ulike forteikn, vil det finnes (minst) ein $c \in [a, b]$ som er slik at $f(c) = 0$.

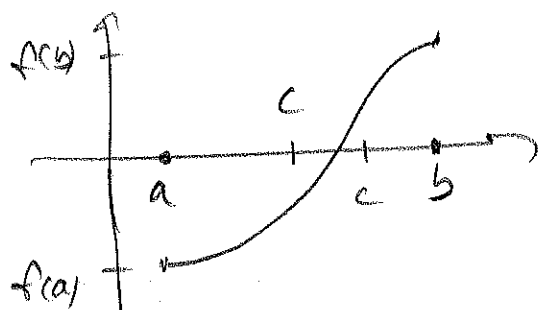
[?] Opplegg?



[?] Kviðr må f vere kont.?

[?] Korleis kan dette brukast til å løyse likningar?

- Alle likn. kan skrivast som $f(x) = 0$



$$c = \frac{a+b}{2} \text{ - midt pkt.}$$

$$f(c) < 0$$

$$a \leftarrow c$$

$$f(c) > 0$$

$$b \leftarrow c$$

etc.

Til slutt: $[a, b]$ veldig smalt
- så smalt vi orkar.

Dette kallar vi halveringsmetoden

Algoritme for å løse $f(x) = 0$ for $x \in [a, b]$

1) Sjekk at f er kont. og $f(a) \cdot f(b) < 0$

2) Bestem nøyaktigheten P

3) Gjentatt så lenge $|b-a| > P$:

3a) Bestem $c = \frac{a+b}{2}$ og $f(c)$

3b) Dersom $f(c) \cdot f(a) > 0$: La c

bli din nye a .

Hvis ikke: La c bli din nye b

4) Finn svaret $x \approx \frac{a+b}{2}$, vent at
løsninga ligger i intervallet $[x - \frac{P}{2}, x + \frac{P}{2}]$

Dette kan vi gjøre i kommando-
vindauge i MATLAB. Men: Bli fort
lei av slikt.

Datamaskiner er gode til å gjøre
(nesten) like operasjoner mange ganger.

→ for og while-løkker

Sjå numeriske-telesjoner!