

Forelesing 13/1

① Proletisk info.

- No bør alle vere lagt til i Frontier
- Reknemeng...

○

② Definisjons- og verdimengd

Eksempel

- Bestem den naturlige definisjonsmengde og verdimengde til

$$f(x) = [\ln(2 - \sqrt{x+2})]^2$$

$\ln x$ - den naturlige logaritmen;
inversfunksjonen til e^x .

To krav: 1) Det under rotteiknet kan ikkje vere negativt.

2) Argumentet til logaritme -

Funktionen und vere positiv.

$$1) \quad x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$2) \quad 2 - \sqrt{x+2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < 2 \Leftrightarrow \\ x+2 < 4 \Leftrightarrow x < 2$$

Also: $D_f = [-2, 2)$

Verdämen

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{x+2} \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(2 - \sqrt{x+2}) \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow [\ln(2 - \sqrt{x+2})]^2 \rightarrow +\infty$$

Somit: $2 - \sqrt{x+2}$ kann vere 1, $\ln 1 = 0$.

$$2 - \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

$V_f = [0, \infty)$

③ Elementære funksjoner

Poeng: Funksjoner kan vere mykje
rent...

I det som kjem vidare, skal vi stort
sett sjå på ei svært avgrensa
klasse av funksjoner.

○

Elementære funk.:

Endel ege kombinasjonar av

- Polynom: $\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

- Potensfunk: x^p , $p \in \mathbb{R}$

○ Eksponentialfunk / logaritmefunk.: a^x , $\log_a x$
Inv. $\downarrow$

- Trigonometriske funk. - med inverser:

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$ ($\sim \sin^{-1} x$),

$\arccos x$, $\arctan x$.

(Ikke så viktig her: $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$,
 $\sinh x$, $\cosh x \dots$)

Kombinasjoner:

Sum, differanse, produkt, forhold:

$$\sin x + x^2, \quad e^x \cdot x^\pi, \quad \frac{\log_2 x}{1+x+x^2} \dots$$

Sammensatte funk.:

$$\arctan e^x, \quad \ln(1+x^2), \quad \sqrt{\cos^2(x+2) + 1} \dots$$

[?] Hvorfor er disse interessante?

- Dulekan ofte opp i naturen, t.d.
- "Greie" å håndtere
- Alltid kontinuerlige der de er definert.

(Skal definere kont. seinere)

④ Eksp. - og logaritme funk.

Brukes veldig e som grunn t.d.:

$$e^x, \quad \log_e x = \ln x$$

[?] Hvorfor? Derivasjonsregler m.a.

Hvis $f(x) = e^x$:

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$[?] \quad D_f = \mathbb{R}, \quad V_f = (0, \infty)$$

Viser: $y = f(x) = e^x$

$$\ln y = \ln e^x = x$$

$$x = f^{-1}(y) = \ln y$$

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

$$D_{f^{-1}} = (0, \infty), \quad V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$(Altid: D_{f^{-1}} = V_f, \quad V_{f^{-1}} = D_f)$$

Laat i relasjonene a^x og $\log_a x$ til e^x og $\ln x$:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Flere regneregler:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^p &= a^{p \cdot x} \\ a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Laat i} \\ &\text{for } x, y \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tillett $x \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} a^0 = 1 & (a \neq 0) \\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \\ a^{1/x} = \sqrt[x]{a} \end{cases}$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\Rightarrow \log_a 1 \stackrel{②}{=} 0$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

~~$$\text{Ikke: } \log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$$~~

Eksempel

- Bakteriekultur doubles sig hver 7. time.

Når er den blevet 10 gange så stor som den var i udgangspunktet?

Tids i timer: t

$t=0$: B_0 bakterier.

Efter 7 timer: $2B_0$

" 14 " : $4B_0 = 2^2 B_0$

etc.

Efter t timer: $t/7$ doublingar.

$$B(t) = B_0 2^{t/7}$$

Skal ha: $B(t) = 10 B_0$

$$B_0 2^{t/7} = 10 B_0$$

$$2^{t/7} = 10$$

$$\ln 2^{t/7} = \ln 10$$

$$t/7 \ln 2 = \ln 10$$

$$t = 7 \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 23.25$$

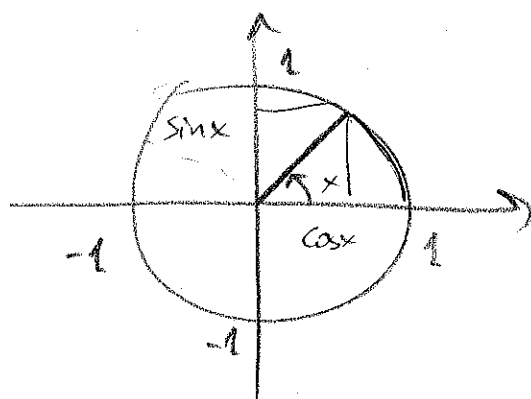
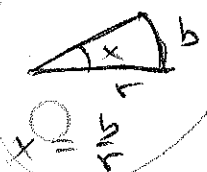
10-dobling efter 23 timer og 15 min.

⑤ Trigonometriske funk.

- Ofte brukt til å skildre periodiske fenomen ($\sim$ Fourier-teori).

Def.:

Radianer



Einingsirkel

x :

- Ser mange identiteter direkte:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Periodiske med periode 2π

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

Definisjon: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Def.-mengd for $\sin x$ og $\cos x$: $\mathbb{R}$

Verdimengd: $[-1, 1]$

For tangens: Kan ikke ha at $\cos x = 0$,

def.-mengd: $\mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Verdimengd: $\mathbb{R}$

Fleire formalar:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Fører til:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

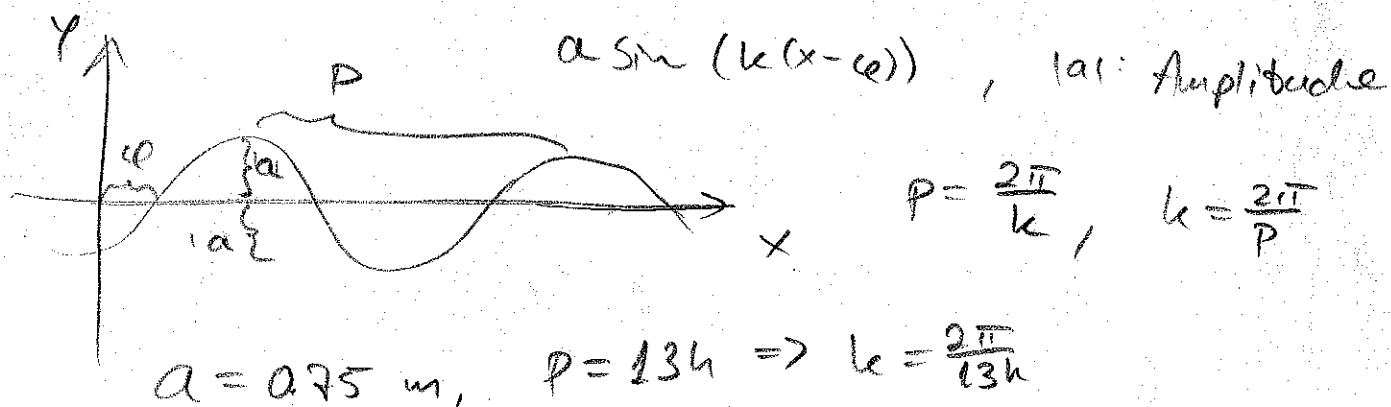
- Nyttig når vi skal integrere seinere.

Eksempel

Er ut fra at vassstanden varierer som ein sinus-funk. med periode 13 timar.

Ein dag var fwa 0.75 m kl. 03:00.

Lag ein modell for tideratnet dette dagnet



Tid til f. f. $c + \frac{P}{4} = 3h \Rightarrow c = (3 - \frac{13}{4})h = -\frac{1}{4}h$

$$T(t) = 0.75 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{13h}(t + \frac{1}{4}h)\right)$$

⑥ Grenseverdier

Intro: Historie om malkeen og eplet.

Poeng: Å merke seg nokto er nokto
dnnu enn $\tilde{a}$ "vere der".

Definisjon av grenseverdi

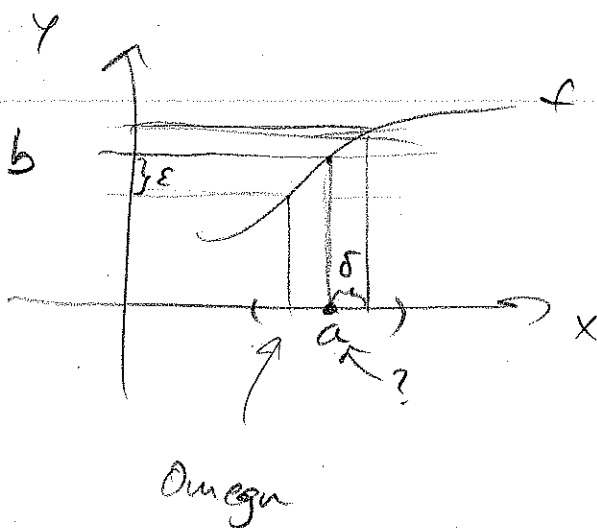
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ betyr:

1) D_f inneheld ei punktoert omegn om a .

2) for kvar $\varepsilon > 0$ finst det eit tal $\delta > 0$

slke at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle $x \in D_f$

som oppfyller $0 < |x - a| < \delta$.



No har de sett
det; ferdig med det.

To viktige grenseverdier

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \text{Eulers tal}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Illustrer i MATLAB (NB: Ikke benz!)

Eksempel

Bestem disse grenseverdier:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

a) Uttrykket er veldef. for $x=2$ - og funksjonen er kont. (med om dekke sendre). Rem insetting:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{2+2}{2+3} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

b) Her er ikke uttrykket def. for $x=2$.
Hvis nevner går mot 0 og telleren ikke

gjør det: uttrykket går mot $\pm \infty$.

Her: Både teller og nevner går mot 0:

$$2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 12 = 0$$

$$2^2 - 4 = 0$$

- Betyr at $x-2$ er felles faktor.

- Kan løse

Nullplass for teller:

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 10}{4}$$

$$x = \frac{-2-10}{4} = -3 \text{ eller } x = \frac{-2+10}{4} = 2$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 2 \cdot (x - (-3)) (x - 2) = 2(x+3)(x-2)$$

$$\text{Nevner: } x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \quad (3. \text{ kv. - løsn.})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+3)}{x+2} = \frac{2 \cdot (2+3)}{2+2} = \frac{5}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}, \quad \text{veit: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Ny variabel: } u = 3x \Leftrightarrow x = \frac{u}{3}$$

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u/3} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3 \cdot 1 = \underline{3}$$

