

# Forelesing 3/1

① Beskrivder?

② Selektsetninge (3.2)

$f$  kont. og deriverbar på  $(a, b)$ :

Det fins eit punkt  $c \in (a, b)$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

③ Intuitivt?

Bilfører:  $v(t) = s'(t)$  (fart og strekning)

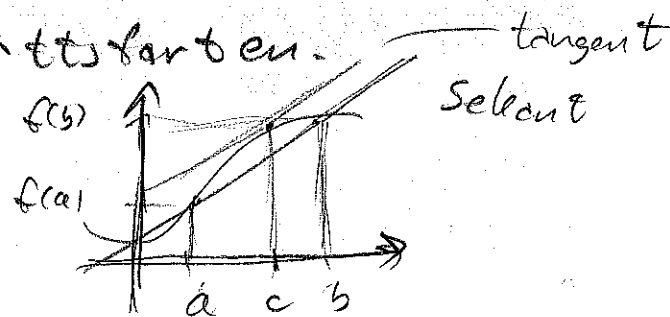
④ Kva seier setninga?

$s'(c)$ : Fart ved  $t = c \in (a, b)$

$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ : Gjennomsnittsfart mellom  $t = a$  og  $t = b$ .

Altst: På minst ett tidspunkt har farten  
vare like gjennomsnittsfarten.

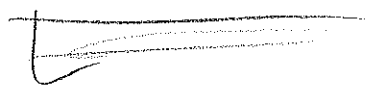
[?] Intuitivt no?



### Eksempel

Vis at sekantsetninga stemmer for  
funke.  $f(x) = e^x + x$  på intervallet

$$I = [0, 1]$$



$$f(0) = e^0 + 0 = 1, \quad f(1) = e^1 + 1 = e + 1$$

$$f'(x) = e^x + 1$$

Skal altså ha, i følge sekantsetninga,  
ei løsning av likninga

$$e^c + 1 = \frac{e + 1 - 1}{1 - 0} \quad \text{der } c \in [0, 1]$$

Stemmer det?

$$e^c + 1 = e$$

$$e^c = e - 1$$

$$c = \ln(e - 1) \approx 0.5413$$

$$0 = \ln 1 < \ln(e - 1) < \ln e = 1; \quad 0 < c < 1$$

Ok

### ③ Integrasjon (5.1)

Derivasjon: Ca 300 år gammel "oppfinning"

Integrasjon: Fra ca 300 f. Kr. - eller eldre!

Men: Er ikke integrasjon det samme som antiderivasjon?

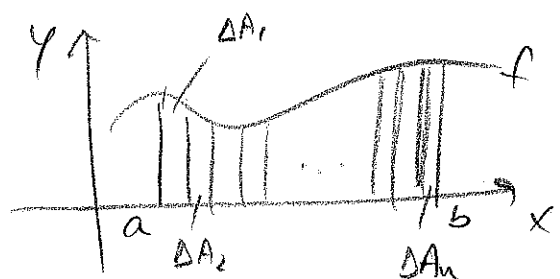
Jo, men det er ikke der vi begynner.

Idé: Reknar ut areal, volum, masse etc.  
Vel å dele objektet opp i masse små  
biter - for så å legge sammen bi-  
draget fra hver bit.

### Riemann-summar

- "Gir navn på dyra"

Idé: Reknar ut areal "i striklar"

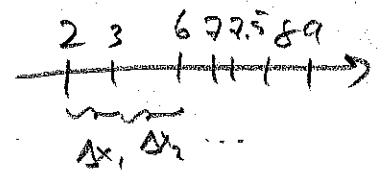


$$A = \sum_{i=1}^N \Delta A_i = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$$

- Deler opp intervallet  $[a, b]$  i  $n$  bitar  
og vel en  $x$ -verdi,  $x_i^*$ , i hvert  
del-intervall.

Oppdeling: Partition  $P$

Utval: Seleksjon  $f$



Eksempel - for  $[2, 9]$

$$P = \{2, 3, 6, 7, 7.5, 8, 9\}$$

$a = x_0$     $x_1$     $x_2$     $x_3$     $x_4$     $x_5$     $x_6 = b$

$$[2, 3], [3, 6], [6, 7], [7, 7.5], [7.5, 8], [8, 9]$$

$$f = \{2.1, 5, 6.9, 7.1, 7.8, 8.5\}$$

$x_1^*$     $x_2^*$     $x_3^*$     $x_4^*$     $x_5^*$     $x_6^*$

Riemannsum for  $f(x)$  med part.  $P$  og  
seleksjon  $f$ :

$$R_{P,f} = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Her:  $n = 6$

MATLAB - plot

Maskevulde:  $|P| = \max \{ \Delta x_i \}$

- breidda på det breiaste del-  
intervallet.

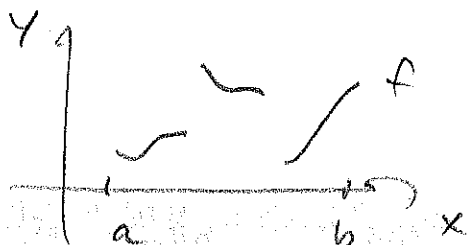
Her:  $|P| = 3$

No er vi klar til å definere integralet:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} R_{P,f}$$

Merke: Dette skal stemme for alle mulige val av  $P$  og  $f$ . - Ikke trivielt å vise.

Men: Integralet  $\int_a^b f(x) dx$  er alltid veldefinert dersom  $f(x)$  er stykkevis kontinuerlig på  $[a, b]$



Altso: Om  $R_{P,f} \rightarrow L$  når  $|P| \rightarrow 0$  for ett bestemt val av  $P, f$ , vil også andre val av  $P$  og  $f$  gi  $L$  når  $|P| \rightarrow 0$ .

Vanlig måte å velge  $P$  på:

Regulær partition

- Alle  $\Delta x_i$ -ene er like;

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ for alle } i.$$

Ofte vel vi  $f$  slik at  $x_i^*$  ligg helt til venstre, høyre eller i midt

Eksempel:  $[2, 4]$

$$P = \{ \overset{x_0}{2}, \overset{x_1}{2.5}, \overset{x_2}{3}, \overset{x_3}{3.5}, \overset{x_4}{4} \}$$

$$\Delta x = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}, \quad n=4$$

Venstre:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 2.5, \quad \dots \quad x_i^* = x_{i-1}$$

Høgre:

$$x_1^* = 2.5, \quad x_2^* = 3, \quad \dots \quad x_i^* = x_i$$

Midt:

$$x_1^* = 2.25, \quad x_2^* = 2.75, \quad \dots \quad x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

For regulær partisjon:  $|P| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$

→ Løse med MATLAB-skript

Merk skenivåte:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \xrightarrow{|P| \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx$$

[?] Når kan vi tolke  $\int_a^b f(x) dx$  som et areal?

Når  $f$  ikke er negativ.

Eksempel

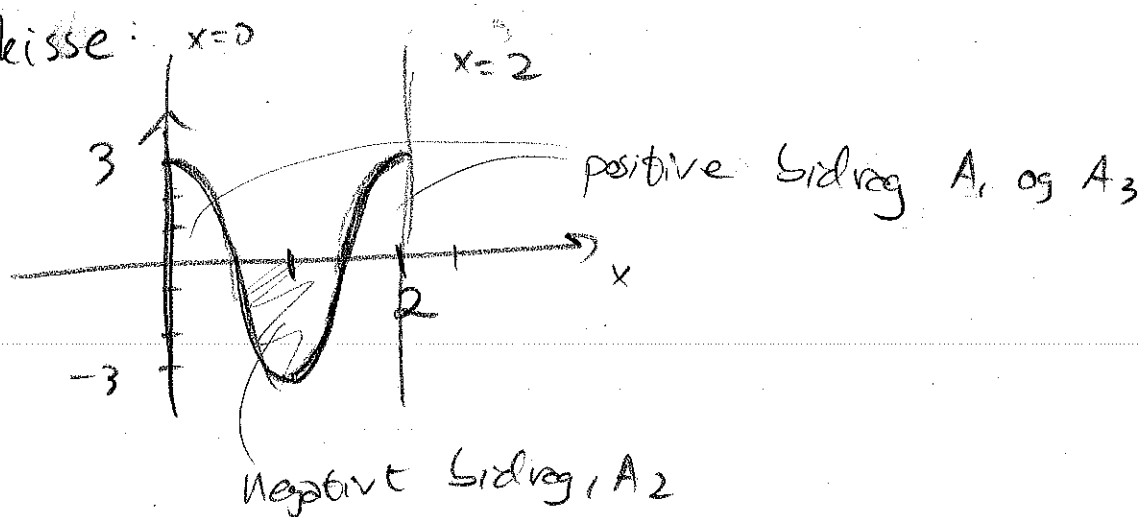
Bestem arelet avgrensa av grafen

til  $f = 3 \cos(\pi x)$ ,  $x$ -aksen og linjene gitt

ved  $x = 0$  og  $x = 2$ .



Skisse:



- Et areal må være positivt.

$$A \neq \int_0^2 3 \cos(\pi x) dx$$

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^{1/2} f(x) dx + \left| \int_{1/2}^{3/2} f(x) dx \right| + \int_{3/2}^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^{3/2} f(x) dx + \int_{3/2}^2 f(x) dx \end{aligned}$$

- Her her alt brødet en reknered...

#### ④ Rekeneregler

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b (c \cdot f(x)) dx &= c \cdot \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \right\} \text{Linearit\textsubscript{et}}$$

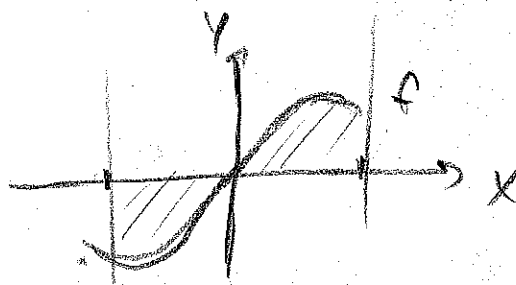
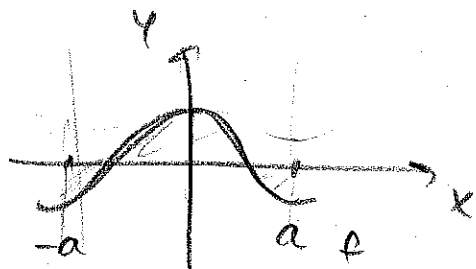
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (\text{brøket over})$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad - \text{definition}$$

# Jamne og odde funksjonar

Jamne :  $f(-x) = f(x)$  (t.d.  $f(x) = \cos x$ )

Odde :  $f(-x) = -f(x)$  (t.d.  $f(x) = \sin x$ )



Ser:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

## 5) Gjennomsnitt

s. 237 i læreboka:

Selevens av temperaturmålingar eit døgn:

|       |       |       |          |
|-------|-------|-------|----------|
| tid   | 1:00  | 2:00  | 24:00    |
| temp. | $T_1$ | $T_2$ | $T_{24}$ |

Gjennomsnitt:  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{24}}{24}$ ,  $T_i = T(t_i)$

Men om vi måler oftare - kvar halvtime,

t.d.

|       |       |       |       |     |          |
|-------|-------|-------|-------|-----|----------|
| tid   | 0:30  | 1:00  | 1:30  | ... | 24:00    |
| temp. | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | ... | $T_{48}$ |

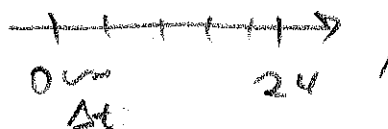
-8-

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{48}}{48}$$

Med  $n$  mätningar:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n} = \frac{T(t_1) + T(t_2) + \dots + T(t_n)}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n T(t_i) \frac{1}{n}$$


 $\Delta t = \frac{24}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{24} \Delta t$

Alltså:  $\bar{T} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n T(t_i) \Delta t$

Riemann-sum

Om vi lät  $n \rightarrow \infty$  (måter helt tids)

$$\sum_{i=1}^n T(t_i) \Delta t \rightarrow \int_0^{24} T(t) dt$$

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \int_0^{24} T(t) dt$$

Generellt:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

## Eksempel

På en kørretur er farten efter  $t$  minutter givet ved  $v(t)$ .

Kva var gennemsnittsfarten fra  $t=2$  til  $t=9$ ?

Efter def.:

$$\bar{v} = \frac{1}{9-2} \int_2^9 v(t) dt$$

Men, her jo også påstået at

$$\bar{v} = \frac{s(9) - s(2)}{9-2} \quad \text{der } v(t) = s'(t)$$

$$\text{Altså: } \int_2^9 v(t) dt = s(9) - s(2)$$

$$\int_2^9 s'(t) dt = s(9) - s(2)$$

→ Fundamentalthorem