Forelesing 27/2

① Beskjedar

Oblig 2

Mandag: Vikar, Halvard Fausk

② Integral som tilnærming til summar

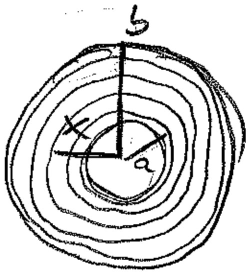
Har sett:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Men vi kan også tenkje motsett veg: om Δx_i er liten / n er stor er integralet ei ok tilnærming til summen.

Eksempel

Vi vil auke radiusen til ein sylinder med radius $a = 2\,cm$ til $b = 5\,cm$. Det gjer vi ved å tape rundt og rundt. Tapen er $\Delta x = 0.05\,cm$ tjukk. Kor mykje tape går med?



Tape 1. runde:

$$\Delta l_1 = 2\pi a$$

2. runde: $\Delta l_2 = 2\pi(a + \Delta x)$

3. runde: $\Delta l_3 = 2\pi(a + 2 \cdot \Delta x)$

i-te runde: $\Delta l_3 = 2\pi(a + (i-1)\Delta x)$

Totalt: $l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$

$$n = \frac{b-a}{\Delta x} = \frac{(5-2)\,cm}{0.05\,cm} = 60$$

$$l = \sum_{i=1}^{60} 2\pi(a + (i-1)\Delta x)$$

- Nesten Riemann-sum; manglar faktor Δx

$$l = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{60} 2\pi(a + (i-1)\Delta x)\,\Delta x = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{60} 2\pi x_i^* \Delta x$$

med $x_i^* = a + (i-1)\Delta x$

Regulær Riemann-sum, venstre seleksjon

Dersom Δx er liten / n er stor:

$$l \approx \frac{1}{\Delta x} \int_a^b 2\pi x\,dx = \frac{1}{0.05} \left[2\pi \cdot \tfrac{1}{2}x^2\right]_2^5 =$$

$$20\pi(5^2-2^2) = \underline{420\pi} \approx 13.2\cdot 10^2$$

Treng 13.2 m tape.

Eigentleg:

$$l = \sum_{i=1}^{60} 2\pi(a+(i-1)\Delta x) =$$

$$\sum_{i=1}^{60} 2\pi(a-\Delta x) + \sum_{i=1}^{60} 2\pi i \Delta x =$$

$$2\pi(a-\Delta x)\sum_{i=1}^{60} 1 + 2\pi\Delta x \sum_{i=1}^{60} i =$$

$$2\pi(a-\Delta x)\cdot 60 + 2\pi\Delta x\cdot \frac{60\cdot(60+1)}{2} =$$

$$120\pi\cdot(2-0.05) + 183\pi = \underline{417\pi} \approx 13.1\cdot 10^2$$

Om Δx hadde vore mindre: Betre tilnærming.

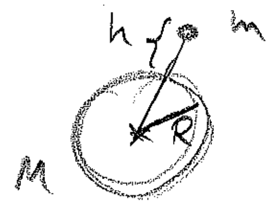
(0.7% feil)

3 Eksempel frå fysikk (6.4)

Arbeid utført av ei kraft F som flyttar ein masse frå a til b:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Eigentleg: F er parallell-komponenten av krafta langs vegen.



Newtons gravitasjonslov:

$$G = \gamma\frac{Mm}{r}$$

γ: Konstant

Vanleg å rekne at $G = mg$ der $g = \gamma \frac{M}{R^2}$

For å flytte noko frå høgda h_1 til h_2: Må virke med ei kraft F som er like stor som G;

$$W = \int_{h_1}^{h_2} G(x)\, dx \quad .$$

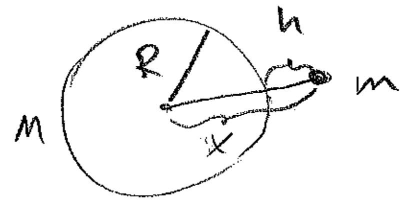
Eksempel

a) For ein gjenstand i høgda h over bakken: Korleis motiverer vi at $G \approx \gamma \frac{M}{R^2} m$?

b) Om vi brukar formelen over til å rekne ut arbeidet vi gjer når vi løftar ein stein på 1 kg 2 km rett opp, kor stor feil gjer vi?

Konst.: $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N \frac{m^2}{kg^2}$, $M = 5.97 \cdot 10^{24}\, kg$, $R = 6.38 \cdot 10^6\, m$.

c) Om vi skulle sende steinen uendeleg langt bort, kor mykje energi måtte vi tilføre?



$G(x) = \gamma \frac{Mm}{x^2}$

Veit: h er liten i høve til R,
$(h \ll R)$

Taylorpolynom om $a = R$

$$G(x) \approx G(R) + G'(R)\underbrace{(x-R)}_{h} + \dots$$

$$G(R) = \gamma \frac{M}{R^2} m$$

$$G'(x) = (\gamma Mm\, x^{-2})' = -2\gamma Mm \cdot x^{-3} = -2\gamma \frac{Mm}{x^3}$$

$$P_1(x) = \gamma \frac{M}{R^2} m - 2\gamma \frac{Mm}{R^3}(x-R) = gm - 2\gamma \frac{Mm}{R^3} h$$

$G \approx gm$: 0. ordens Taylor-polynom

b) Med $G = gm$, $g = \gamma \frac{M}{R^2} = \dots = 9.783\, m/s^2$

$$W = \int_0^{2000m} gm\, dx = gm\,[x]_0^{2000m} = gm \cdot 2000m =$$

19565.4 J

Med $G = \gamma \frac{Mm}{x^2} = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}$

- Anten int. x frå R til $R + 2000m$ eller
int. h frå 0 til 2000 m.

Det siste:

$$W = \int_0^{2000m} \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}\, dh = \gamma Mm \int_0^{2000m} (R+h)^{-2}\, dh =$$

$$\gamma Mm \left[\frac{1}{-2+1}(R+h)^{-1}\right]_0^{2000m} = -\gamma Mm \left[\frac{1}{R+h}\right]_0^{2000m} =$$

$$-\gamma M m \left(\frac{1}{R+2000m} - \frac{1}{R} \right) =$$

$$+6.67\cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2} \cdot 5.97\cdot 10^{24} kg \cdot \left(\frac{1}{6.38\cdot 10^6 m} - \frac{1}{6.38\cdot 10^6 m + 2000 m} \right) =$$

19559.3J

Feil: $19565.4J - 19559.3J = \underline{6.1J}$

Relativ feil: $\frac{6.1\,J}{19559.3J} = 3.1\cdot 10^{-4} = 0.031\,\%$

c) Uendeleg langt bort:

$$W = \lim_{b\to\infty} \int_0^b G(h)\,dh =$$

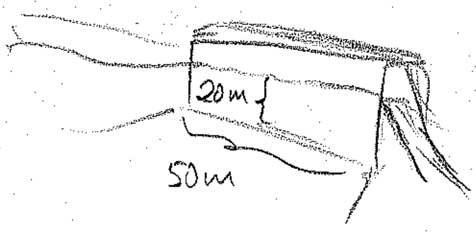
$$-\gamma M m \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) = -\gamma M m \left(0 - \frac{1}{R}\right) =$$

$$\gamma \frac{Mm}{R} = \ldots = \underline{6.24\cdot 10^7\, J}$$

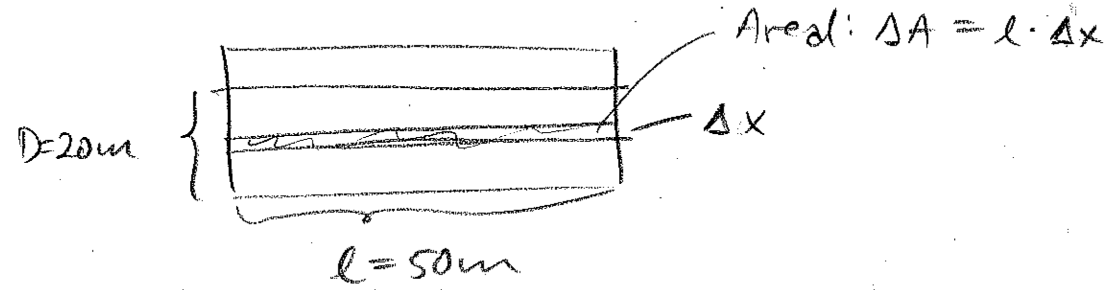
Trykk: Kraft per areal, $p = \frac{dF}{dA}$

I vatn: $p = p_0\left(1 + \frac{x}{10}\right)$, $p_0 = 10^5$ (i N/m^2) og x er djupna i meter.

<u>Eksempel</u> Finn den samla krafta på denne demningen:



Rektangel



Kraft på ΔA: $\Delta F = p_0(1+\frac{x}{10})\cdot \Delta A = p_0(1+\frac{x}{10}) l \Delta x$

Samla kraft: $F \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i \rightarrow \int_0^D p_0(1+\frac{x}{10})\, l\, dx$

$F = \int_0^D p_0\,(1+\frac{x}{10})\, l\, dx = p_0 l\, [x + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}x^2]_0^D =$

$10^5 \cdot 50\,(20 + \frac{1}{20}\cdot 20^2 - 0) = 2.00\cdot 10^8$

Krafta er $\underline{2.00\cdot 10^8\,N}$.

④ Vi begynnar på lineær algebra

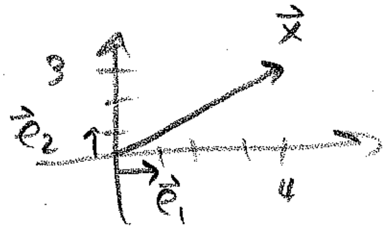
- bytar bok.

I dag: Introduserar omgrep.

- „Fresh start" ?

Vektorar

- Storleik og retning
- Illustrerar med pil



$\vec{x} = [4,3]$ - koordinatform

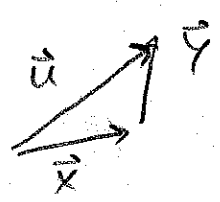
Merk: Skriv pil over x for å seie at det er ein vektor. (På trykk: Feit bokstav)

$\vec{x} = [4,3]$ betyr eigentleg at

$\vec{x} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ der $\vec{e}_1$ har lengda 1 og er parallell med x-aksen, og $\vec{e}_2$ har lengda 1 og er parallell med y-aksen.

Addisjon: $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$

Geometrisk



Koordinatform

$\vec{x} = [x_1, x_2]$, $\vec{y} = [y_1, y_2]$

$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$

Skalar-multiplikasjon: $c\vec{x} = [cx_1, cx_2]$

Lengde: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Ser: $|\vec{u}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Trekant ulikskapen)

Her: Vektorar kan vere rekker, men oftast er dei søyler;

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dei kan ha kor mange komponentar som helst;

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 14.3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

– Vanskeleg å illustrere, men ingen problem å rekne med.

$\vec{y}$ har 5 reelle komponentar; vi seier at $\vec{y}$ ligg i „R-5", $\vec{y} \in \mathbb{R}^5$

$\mathbb{R}^5$ er eit eksempel på eit vektorrom.

Eksempel

Gitt $\vec{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$,

a) kva rom ligg $\vec{x}, \vec{y}$ i?

b) finn $2\vec{x} - \vec{y}$.

a) Har 3 komponentar; $\vec{x}, \vec{y} \in \underline{\mathbb{R}^3}$

b) $2\vec{x} - \vec{y} = 2\begin{bmatrix} \pi \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 2\pi - 8 \\ -4 - 2 \\ 2 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi - 8 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Lineærkombinasjon

Lineære operasjonar:
- Addisjon
- Skalarmultiplikasjon

Om vi har eit sett med vektorar $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, t.d., vil eit uttrykk på forma $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$ vere ein lineærkombinasjon av $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ og $\vec{x}_3$.

Eksempel

Gitt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, er $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ein lineærkombinasjon av $\vec{x}$ og $\vec{y}$?

Altså: Finst det ein c_1 og ein c_2 slik at

$\vec{u} = c_1 \vec{x} + c_2 \vec{y}$?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c_1 + 2c_2 \\ 7c_1 + 4c_2 \end{bmatrix}$$

$5c_1 + 2c_2 = 3$ i)

$7c_1 + 4c_2 = 3$ ii)

$-2 \times$ i) lagt til ii):

$$\begin{aligned} -10c_1 - 4c_2 &= -6 \\ + \quad 7c_1 + 4c_2 &= 3 \\ \hline -3c_1 + 0 &= -3, \quad \underline{c_1 = 1} \end{aligned}$$

i): $5c_1 + 2c_2 = 3$

$5 \cdot 1 + 2c_2 = 3, \quad c_2 = \frac{3-5}{2} = \underline{\underline{-1}}$

Altså: $\vec{u} = 1 \cdot \vec{x} + (-1)\vec{y}$; $\vec{u}$ <u>er</u> ein lineær-kombinasjon av $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

Matriser

Ei matrise er eit rektangel med tal.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Vanleg å gi namn med stor bokstav.
- Kan sjå på det som fleire rekke-vektorar oppå kvarandre, eller fleire søylevektorar ved side av kvarandre;

$A = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \hline \vec{r}_2 \\ \hline \vec{r}_3 \end{bmatrix}$ der $\vec{r}_1 = [5, -7, 8, 4] \in \mathbb{R}^4$ eller

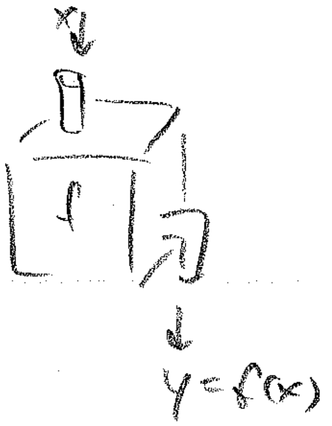
$A = [\vec{s}_1 | \vec{s}_2 | \vec{s}_3 | \vec{s}_4]$ der $\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

A har 3 rekker og 4 søyler; det er ei 3×4-matrise. Eller: A har formatet 3×4. (NB: talet på rekker først, så talet på søyler).

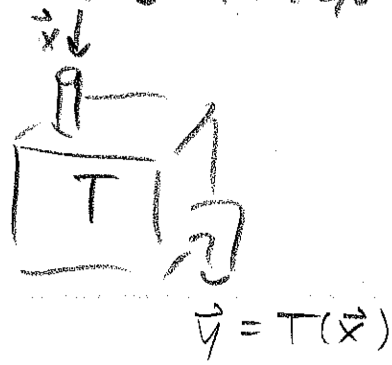
Transformasjonar

– Som funksjonar – bortsett frå at både argument og „funksjonsverdi" kan vere vektorar

Funksjon



Transformasjon



$x, y \in \mathbb{R}$

f: Trans. frå $\mathbb{R}^1$ til $\mathbb{R}^1$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

Merk n og m treng ikkje vere like.

$\mathbb{R}^n$: Frårom („domain")

$\mathbb{R}^m$: Tilrom („codomain")

– Har lagt ut „ordliste" på Fronter

Eksempel

Desse transformasjonane er gitt:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{x_1} + x_2 \\ x_1 - \cos x_2 \end{bmatrix},$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

a) Kva er frå- og tilromma til T og S?

b) $T(\vec{x})$ og $S(\vec{x})$ for $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og for $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ er frårommet til både T og S.

Ser også at $T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ er også tilrommet til T.

$S(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$, tilrommet til S er $\mathbb{R}^3$.

Skriv: $\underline{T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^1 + 2 \\ 1 + \cos 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e + 2 \\ 1 + \cos 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.39 \\ 0.58 \end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^0 + 0 \\ 0 + \cos 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$S\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1-2\\2\cdot 1+2\\3\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\\6\end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0-0\\2\cdot 0+0\\3\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Lineær transformasjon

For alle $\vec{x}, \vec{y}$ i fra-rommet og alle $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} T(c\vec{x}) = c\,T(\vec{x}) \\ T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}) \end{cases}$$

Eksempel

Er T og S i forrige eksempel lineære?

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e^{x_1} + x_2\\x_1 - \cos x_2\end{bmatrix}$$

med $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e+1\\1-\cos 1\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{x}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e^1+0\\1-\cos 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e\\0\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{y}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e^0+1\\0-\cos 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-\cos 1\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = \begin{bmatrix}e+2\\-\cos 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}e+1\\1-\cos 1\end{bmatrix} = T(\vec{x}+\vec{y})$$

T er <u>ikke</u> lineær

- Nole med eitt motdeksempel

Lat $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$S(\vec{x}+\vec{y}) = S\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)-(x_2+y_2) \\ 2(x_1+y_1)+x_2+y_2 \\ 3(x_2+y_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1-x_2 + y_1-y_2 \\ 2x_1+x_2 + 2y_1+y_2 \\ 3x_2+3y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ 2x_1+x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1-y_2 \\ 2y_2+y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix} =$$

$$S(\vec{x}) + S(\vec{y}) \qquad \text{OK}$$

$$S(c\vec{x}) = S\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx_1 - cx_2 \\ 2\cdot cx_1 + cx_2 \\ 3\cdot cx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,(x_1-x_2) \\ c\,(2x_1+x_2) \\ c(3x_2) \end{bmatrix} =$$

$$c\begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ 2x_1+x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = c\,S(\vec{x}) \qquad \text{OK}$$

Altså: $S(\vec{x}+\vec{y}) = S(\vec{x}) + S(\vec{y})$ for alle $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ og
$S(c\vec{x}) = c\,S(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ og $c \in \mathbb{R}$

S er lineær

Matrise-vektor-produkt

Produktet $A\vec{x}$ der

$A = [\vec{s}_1 | \vec{s}_2 | \dots | \vec{s}_n]$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ er definert

som

$$\boxed{A\vec{x} = x_1\vec{s}_1 + x_2\vec{s}_2 + \dots + x_n\vec{s}_n}$$

– Altså: en lineærkombinasjon av søylene i A med $x_1, x_2, \dots$ som koeffisienter

Merk: A må ha like mange søyler som $\vec{x}$ har komponenter.

Eksempel

a) Regn ut $A\vec{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Vis at $S(\vec{x})$ kan skrives som $B\vec{x}$ der $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -14+0+2 \\ -6+0+4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -12 \\ -2 \end{bmatrix}}$

b) $S'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3 \cdot x_2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$$B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = S'(\vec{x}) \qquad \square$$

Påstand

Alle lineære transformasjonar frå $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kan skrivast som $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ der A er ei $m \times n$-matrise