

Foredlesing 24/2

① Beskjedar

Oblig 2 til 3/3

Merke: - Tor ikke imot etter fristen -
med mindre en har avklart dette
p^o forhand med en god grunn

- Kun to forsøk - og det første
skal vere eit reelt forsøk

- Om en ikke har gjort
nok reit p^o MATLAB-oppgavene,
for en ikke godkjend.

- Hugs framsideval og skriv tydelig.

Til torsdag: Tor lineær-algebra i ei
litt anna rekkefølge enn før.
Definerer omgrep p^o forelesinga.

② Numerisk integrasjon

- Har alt sett på en metode. Kva ser
ein [?]

- Riemann-summar.

Helst: Midtpunkseleksjon

Kvifor?

- Har jo sett at vi kan integrere med
antiderivasjon - og vi har jo ei
god verktøykasse med tekniske.

Men: 1) Mange enkle funksjonar har
ingen elementære anti-derivert,

Eksempel: $\cos x^2$, $\cos x^3$, ...

$\sin x$, e^{x^5} , $x e^{x^3}$ etc...

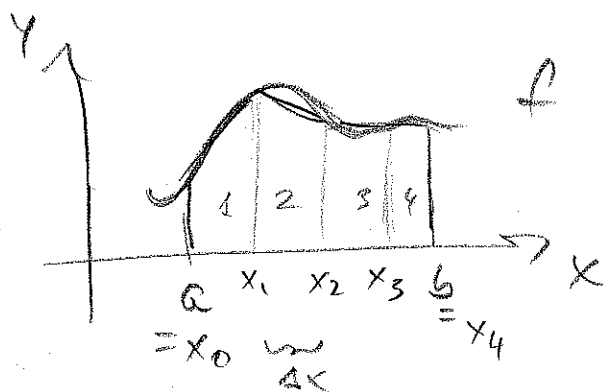
2) Andre' funks. har ein veldig
komplisert anti-derivert

3) Av og til har vi ikkje sjølve
funksjonen - berre ein graf eller
ein tabell.

Trapesmetoden

→ Demo i MATLAB

- Omtrent "like god" som Riemann-sum med midtpunktsseleksjon.



$$1: \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x$$

$$2: \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x$$

Areal:

$$T = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Delta x +$$

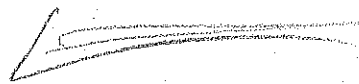
$$\frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \Delta x + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \Delta x =$$

$$\Delta x \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2} f(x_4) \right)$$

NB: Kan også brukes på ikke-regulære oppdelinger.

Eksempel

Estimer dette integralet med tre rette
desimaler: $\int_0^5 \cos \sqrt{x} dx$



→ MATLAB

Viktig: Sjekk konvergens!

Eksempel

Anta at vi måler følgende vannstrøm i
røret til dusjen:

tid (s)	0	20	40	60	80	100	120
Strøm (l/min)	12.1	11.3	10.6	9.91	9.27	8.67	8.11

Kor mye vann har røret på disse
to minuttene?



Farten vi bruker vann med i $f(t)$

Brukes totalt: $\int_0^{120} f(t) dt$

Estimerer med trapes-metoden:

$$T_n = \Delta x \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

$$\Delta x = 20, n = 6$$

$$\int_0^{120} f(t) dt \approx$$

$$20 \left(\frac{1}{2} \cdot 12.1 + 11.3 + 10.6 + 9.91 + 9.22 + 8.62 + \frac{1}{2} \cdot 8.11 \right) =$$

$$1197.2 \approx 1.2 \cdot 10^3$$

Med eining: $1197.2 \text{ s} \cdot \frac{\text{l}}{\text{min}} = 1197.2 \text{ l} \cdot \frac{1}{60} \approx 19.95 \text{ l}$

Det har ranne $19.95 \text{ l} \approx \underline{20.0 \text{ l}}$ vann.

Simpsons metode: Ikke pensum

- -Brukar "parabel-bitar" i steden for "linje-bitar"; meir nøyaktig

③ Volum ved integrasjon (6.1)

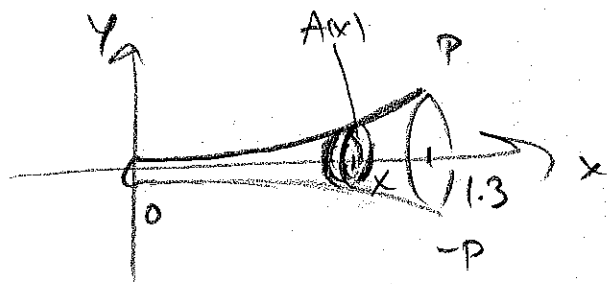
Eksempel

- Profilen på ein lur er gitt ved

$$p(x) = 0.01(x^2 + 1), \quad D_p = [0, 1.3]$$

x og p gitt i meter.

Kva er volumet av luren?



Hugsar: $V = \int_a^b A(x) dx$
 $\uparrow$
 Areal av snittsfläke

Her: $A(x) = \pi r^2$ med $r = p(x)$

Alltså:

$$V = \int_0^{1.3} \pi (p(x))^2 dx = \pi \int_0^{1.3} (0.01(x^7+1))^2 dx =$$

$$\pi \cdot 0.0001 \int_0^{1.3} (x^{14} + 2x^7 + 1) dx =$$

$$0.0001\pi \left[\frac{1}{15} x^{15} + \frac{2}{8} x^8 + x \right]_0^{1.3} =$$

$$0.0001\pi \left(\frac{1}{15} \cdot 1.3^{15} + \frac{1}{4} \cdot 1.3^8 + 1.3 - 0 \right) \approx$$

$$0.002121 \approx 2.12 \cdot 10^{-3}$$

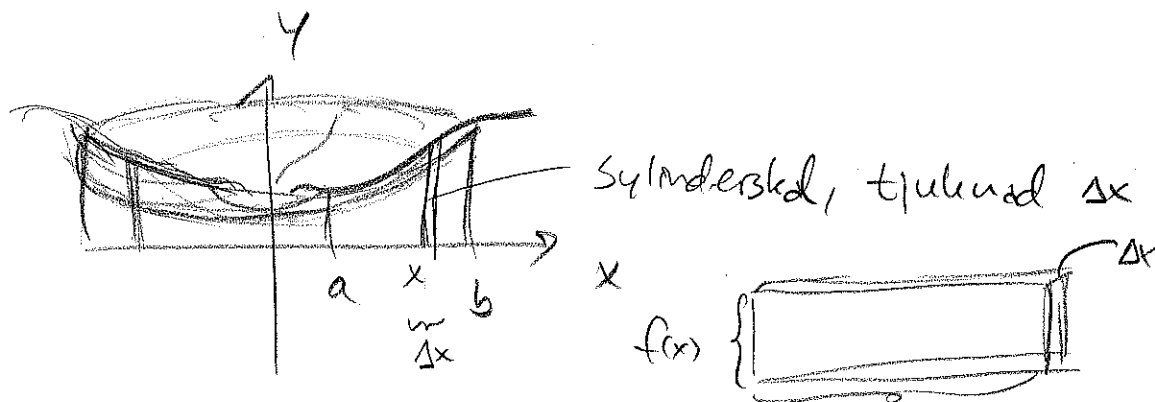
Volumen er ca. $2.12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = \underline{2.12 \text{ l}}$.

Generelt:

Volumen vi får når vi gir grafen til $f(x)$ fra $x=a$ til $x=b$ blir rotert om x-aksen er

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Rotasjon om y-aksen



Volum av skal: $\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$

$$\bigcirc \quad V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

$n \rightarrow \infty$:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Altså:

Volumet vi får om grafen til $f(x)$ mellom $x=a$ og $x=b$ blir rotert om y-aksen er

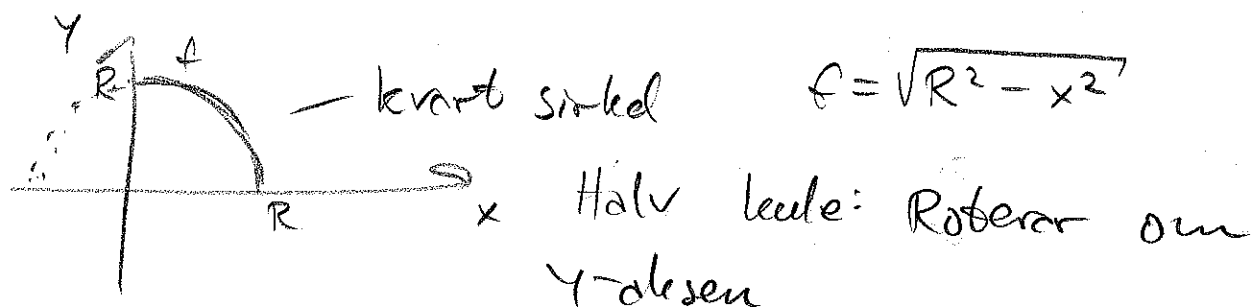
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Eksempel

Vis at volumet af en kule med radius R er $\frac{4}{3}\pi R^3$

To måder:

1) Om y -aksen:



$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^R x f(x) dx = 4\pi \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Variablebyttes: $u = R^2 - x^2$, $\frac{du}{dx} = -2x$, $dx = -\frac{1}{2x} du$

$$u(0) = R^2, u(R) = 0$$

$$V = 4\pi \int_{R^2}^0 x \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) du = -2\pi \int_{R^2}^0 \sqrt{u} du = 2\pi \int_0^{R^2} u^{1/2} du$$

$$2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^{R^2} = 2\pi \frac{2}{3} [u^{3/2}]_0^{R^2} = \frac{4\pi}{3} [R^3 - 0] = \frac{4\pi}{3} R^3$$

2) Om x -aksen:

$$V = \int_{-R}^R \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}^2 dx =$$

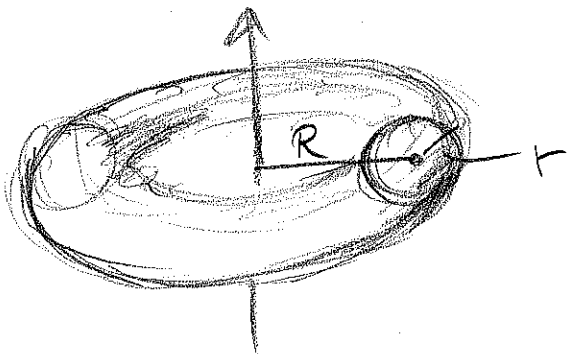
$$\pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R =$$

$$\pi \left[R^2 R - \frac{1}{3} R^3 - (R^2 (-R) - \frac{1}{3} (-R)^3) \right] =$$

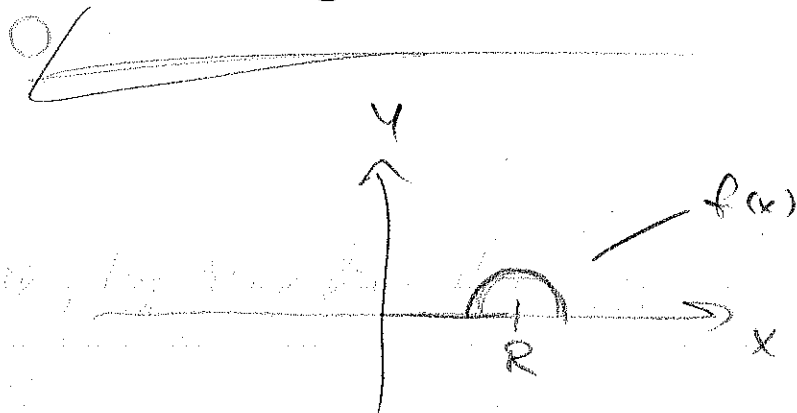
$$\pi (R^3 - \frac{1}{3} R^3 + R^3 - \frac{1}{3} R^3) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Eksempel

Find volumet af denne figuren



- Smultring med radius r og R



Sirkel med radius r omkring (x_0, y_0)

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Her: $(x-R)^2 + (y-0)^2 = r^2$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - (x-R)^2}, \text{ vel } f(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$$

Halv smultring:

$$V_{1/2} = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x f(x) dx =$$

$$2\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx$$

[?] Løsningsideer?

→ Numerisk? OK.

- Kan gjerast analytisk også:

$$u = x - R, \quad du = dx, \quad u(R-r) = -r, \quad u(R+r) = r$$

$$\int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx =$$

$$\int_{-r}^r (u+R) \sqrt{r^2 - u^2} du =$$

$$\int_{-r}^r \underbrace{u \sqrt{r^2 - u^2}}_{\text{Oddfunksjon}} du + R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du$$

Oddfunksjon

$$\int_{-r}^r u \sqrt{r^2 - u^2} du = 0$$

$\sqrt{r^2 - u^2}$: Halvsirkel med radius r

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du : \text{Areal } \frac{1}{2} \cdot \pi r^2$$

$$\text{Alttså: } \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx = R \cdot \frac{1}{2} \pi r^2$$

Heile volumet:

$$V = 2 \cdot V_{1/2} = 2 \cdot 2\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

Tilnærming:

Sylinder med same høgd som om-
linsen av smuttringen (langs midten)

$$O = 2\pi R, \text{ grunnflate } \pi r^2$$

$$\text{Volum: } 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2 \quad - \text{det same!}$$

(sjå s. 292)

