

Foredøsing 13/2

① Beskriv:

Oblig 1 rettes; kan kontast der du leverte.

Om du må gjøre det om igjen:
Lever i hylle vis a vis kontorert mitt.

Frst: Tysdag 18. kl. 14:00 - siste frøuse.

Oblig 2 last ut. Frst: 28/2 kl. 14:00
(fredag)

(2) Kommentarer til Oblig 1

- Dei aller fleste felek gølle/end.
- Mange skriv fin kode (og ndre sine liknar litt på mine koder - men det er OK).

Men - Mange har ikkje skjant at det er ei inlevering; det ser ut som ein leidd.

- Skriv leseleg
- Bruk linjal på understrekingar.
- Skriv storet tydeleg

- Mange har tynn grunngjeving.

Eksempel: $f(t) = 350\,000 \cdot 0.9^t$

Jå, men alle svar skal ha grunngjeving!

Kvifor?

Ofte er utrekinga grunngjeving nok, andre gonger må vi ha med tekst.

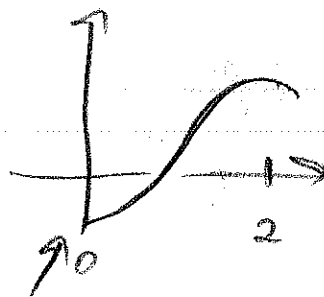
Så mitt løsningsforslag (kjem på torsdag).

- Kva betyr " $x \leq \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ "?

- Mange svunker grovt.

- f kont. med $D_f = [a, b]$ (lukket intervall):

Topp og bunn.



bunn - den letteste!

- En del: Tatt med skript, men ikke svar

- Andre: Gjort 3d men ikke 3e -
spør om skriptet treng minimal
justering.

③ Eksempel fra mandag

iii) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

iv) $\int \ln x dx$

v) $\int x \sqrt{x+1} dx$

vi) $\int \cos x e^x dx$

iii) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
 $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2} =$
 $\frac{1}{4} (1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1 + \cos(2 \cdot 2x)}{2}\right) =$
 $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4x)$
 $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4x)\right) dx =$
 $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4x) + C$

vi) Variabelbyte: $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$, $du = dx$

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \int x \sqrt{u} du = \int (u-1) u^{1/2} du =$$
$$\int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} u^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C =$$
$$\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{5} (x+1)^{5/2} - \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C$$

iv) $\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$

Delvis int: $\int u v' dx = uv - \int u' v dx$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v' = 1 \Leftrightarrow v = x$

$$\int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - \int 1 dx =$$

$$x (\ln x - 1) + C$$

vii) $\int \cos x e^x dx$

Delvis:

$$u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x, \quad v' = e^x \Leftarrow v = e^x$$

$$\int \cos x e^x dx = \cos x e^x - \int (-\sin x) e^x dx =$$

$$\cos x e^x + \int \sin x e^x dx$$

Ny delvis int. på $\int \sin x e^x dx$:

$$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x, \quad v' = e^x \Leftarrow v = e^x$$

$$\int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

Alttså:

$$\int \cos x e^x dx = \cos x e^x + \sin x e^x - \int \cos x e^x dx$$

Like langt?

Nei:

$$\int \cos x e^x dx + \int \cos x e^x dx = \cos x e^x + \sin x e^x$$

Like[?]

Jå, næsten...

$$2 \int \cos x e^x dx = \cos x e^x + \sin x e^x + C'$$

$$\int \cos x e^x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C' \quad (C' = \frac{1}{2} C')$$

④ Meir om (bestemte) integral

Der som $F'(x) = f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Vanleg skrivemåte: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Bestemt int. - versjone av delvis int. og variabelbyte:

$$\int_a^b u v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dx$$

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Eksempel

Rekn ut desse integrala:

a) $\int_0^2 x^2 \sin(\pi x) dx$

b) $\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx$

c) $\int_0^1 (2x-1) \cos(x^2-x) dx$

a) Delvis:

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x, \quad v' = \sin(\pi x) \Leftrightarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$$

$$I = \int_0^2 x^2 \sin(\pi x) dx = \left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos(\pi x) \right]_0^2 -$$

$$\int_0^2 2x \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \left[x^2 \cos(\pi x) \right]_0^2 +$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cos(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} (2^2 \cdot \cos(2\pi) - 0) + \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cos(\pi x) dx$$

$$= -\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cos(\pi x) dx$$

Ne delvis in.

$$u = x \Rightarrow u' = 1, \quad v' = \cos(\pi x) \Leftrightarrow v = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$$

$$\int_0^2 x \cos(\pi x) dx = \left[x \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} (2 \sin(2\pi) - 0) - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^2 =$$

$$0 + \frac{1}{\pi^2} (\cos(2\pi) - \cos 0) = 0$$

$$I = -\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot 0 = \underline{\underline{-\frac{4}{\pi}}}$$

b) $I = \int_0^\pi \sin x e^{\cos x} dx$

Variabelbyte: $u = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x, \quad dx = -\frac{1}{\sin x} du$

$$u(0) = \cos 0 = 1, \quad u(\pi) = \cos \pi = -1$$

$$I = \int_1^{-1} \sin x e^u \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du = -\int_1^{-1} e^u du = +\int_{-1}^1 e^u du =$$

$$\left[e^u \right]_{-1}^1 = \underline{\underline{e - \frac{1}{e}}}$$

c) Lite oppleinstrueret...

$$I = \int_0^1 (2x-1) \cos(x^2-x) dx$$

$$u = x^2 - x, \quad \frac{du}{dx} = 2x-1, \quad dx = \frac{1}{2x-1} du$$

$$u(0) = 0^2 - 0 = 0, \quad u(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$I = \int_0^0 (2x-1) \cos u \cdot \frac{1}{2x-1} du = \int_0^0 \cos u du = 0$$

$$(\int_a^a f(x) dx = 0)$$

Merke:

Heitt ok 2 gjeire stikk:

1) Finn ubestemt int.

2) Sett inn grensene etterpå

$$1) \int \sin x e^{\cos x} dx = -e^{\cos x} + C$$

$$2) \int_0^\pi \sin x e^{\cos x} dx = [-e^{\cos x}]_0^\pi = \dots$$

Men dette er feil:

$$\int_0^\pi \sin x e^{\cos x} dx = \int_0^\pi \sin x e^u \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du =$$

$$-\int_0^\pi e^u du = -[e^u]_0^\pi = -[e^{\cos x}]_0^\pi$$

-Gir rett svar, men feil (og tungnødt)

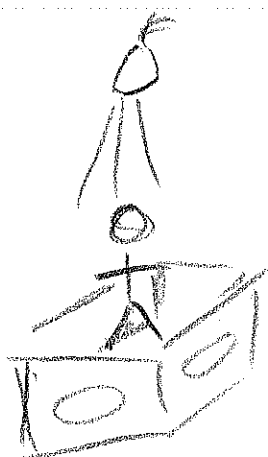
Også feil:

$$\int_0^2 x^2 \sin(\pi x) dx = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos(\pi x) - \int 2x \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos(\pi x) dx$$

$$= \dots$$

5) Bruk av integral (del 1)

Poeng: Kan bestemme størleikar ved å dele ting opp i bitar.



Vannbehl trykk, renn
 $f(t)$ liter per sekund.

Kor mykje har runne det
første minuttet?

Deler $[0, 60]$ opp i bitar:

$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ der
 $t_0 = 0$ og $t_n = 60$

Mellom t_{i-1} og t_i : $f(t)$ endrar seg
lite, nesten konstant.

Frå t_{i-1} til t_i renn det ca

$f(t_i^*) \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$ liter

Til saman: $V \approx \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i$

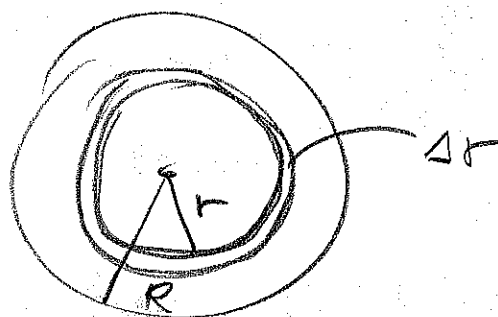
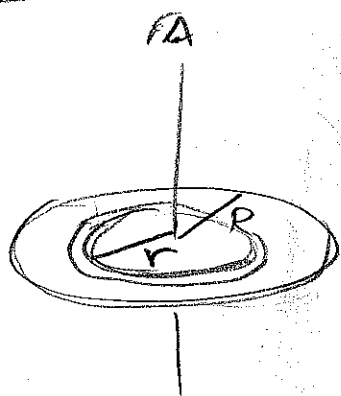
For å få det nøyaktig: $n \rightarrow \infty$

Riemann-summen blir eit integral:

$$V = \int_0^{60} f(t) dt$$

Eksempel

Vis at arealet af en cirkel med radius R er πR^2 .



- Ring med indre radius r og ydre radius $r + \Delta r$

Dersom Δr er liten: Arealet blir som en "strikk" med lengde $2\pi r$ og bredde Δr .

$$\Delta A_i \approx 2\pi r_i \cdot \Delta r_i$$

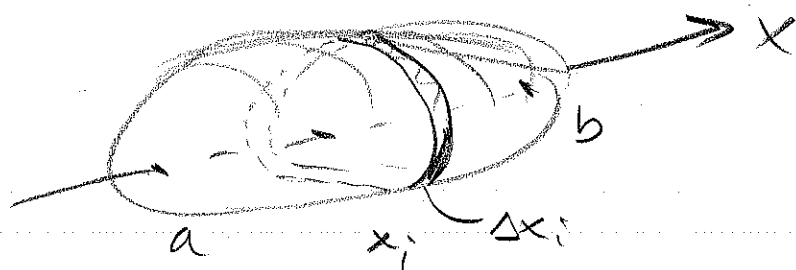
Når $\Delta r_i \rightarrow 0$, blir dette nøyaktig

$$A \approx \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n 2\pi r_i \Delta r_i \quad (\text{Riemann-sum}).$$

$n \rightarrow \infty$:

$$A = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \pi (R^2 - 0^2) = \pi R^2$$

Volume



- Det kan være snare om et leneipp-brød, t.d. Steier det i skiver.

Ved x har snittflate areal $A(x)$

Volume:

$$\Delta V_i \approx A(x_i) \Delta x_i$$

kor tykkelse skiva er

thvs Δx_i er liten:
Som en sylinder



$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b A(x) dx$$

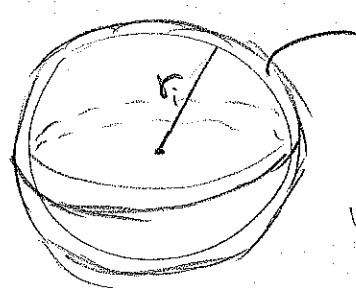
$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Volume blir integralet av arealet av snittflate

Eksempel

Gitt at overflate av eit leuleskal er $4\pi r^2$, der r er radien, vis at volumet av ei kule med radius R er $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Skal:



Δr_i

Tjukkelse: Δr_i

Vis:

Flate inne: $4\pi r_i^2$

Flate ute: $4\pi (r_i + \Delta r_i)^2 = 4\pi (r_i^2 + 2r_i\Delta r_i + \Delta r_i^2)$

- Nesten likt når Δr_i er liten.

Volum av Skal: $\Delta V_i = 4\pi r_i^2 \Delta r_i$

Same resonnering som før:

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 dr = 4\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

□

[2] Hva er variabelen til denne funksjonen:

$$\int_a^x (\sin t^2 + \sqrt{t}) dt \quad ?$$

x, ikke t - namnet på variabelen:
integranden er irrelevant. Vi kan
like gjerne skrive

$$\int_a^x (\sin \alpha^2 + \sqrt{\alpha}) d\alpha.$$

t, α : "dummy variable"

Generelt: Hvis $F'(x) = f(x)$, er $\int_a^x f(t) dt =$
 $F(x) - F(a)$

$$\begin{aligned} \text{Derfor: } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} (F(x) - F(a)) \\ &= F'(x) - 0 = f(x) \end{aligned}$$

Eksempel

Deriver $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot \sqrt{\frac{\sin t}{t^2+1}} dt$

$$g'(x) = e^{-x^2} \sqrt{\frac{\sin x}{x^2+1}}$$

