Forelesing 10/2

① Beskjedar

Om [illegible]eling av obligar

For dei som ikkje fekk godkjend:

Frist: 1 veke til å levere på nytt.

② Fundamental-teoremet (5.3)

Sjå, for fart og strekning:

$$\int_a^b s'(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

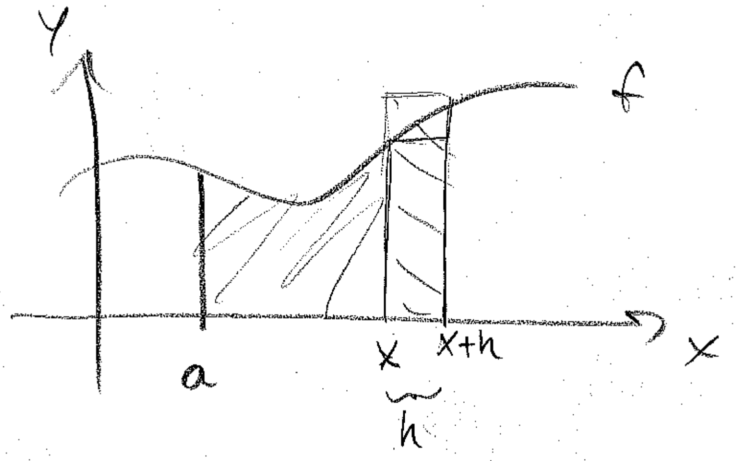
Generelt: Dersom $F'(x) = f(x)$, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Merk: Det som starta som ein Riemann-sum har blitt anti-derivasjon

- Ikkje trivielt!
- Fann det ut på 1600/1700-talet

Dette skal vi bevise:



Antar $f \geq 0$ og

$f'(x) > 0$

– og at f er kont.

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

$$\Delta A = \Delta A(x+h) - A(x)$$

Ser: $\quad f(x)\cdot h \leq \Delta A \leq f(x+h)\cdot h$

Altså: $\quad f(x) \leq \frac{\Delta A}{h} \leq f(x+h) \quad (h>0)$

f kontinuerleg $\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

Ved „skvislova"

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta A}{h} = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

Dersom $F'(x) = f(x)$:

$A'(x) = F'(x) \Leftrightarrow A(x) = F(x) + C$ – konstant.

Veit: $A(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow 0 = F(a) + C \Leftrightarrow$

$C = -F(a)$

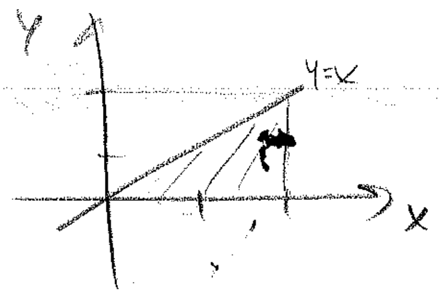
$A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\square$

Eksempel

Vis at anti-derivasjon faktisk gir det relevante arealet for $\int_0^2 x\,dx$.



Areal: $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 = \int_0^2 x\,dx$

Anti-derivert til x: $\frac{1}{2}x^2$; $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$F(2) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0 = \underline{2}$

$\square$

③ Det ubestemte integralet (4.3)

Dersom $F(x)$ er ein anti-derivert til $f(x)$, $F'(x) = f(x)$, er det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

C: Vilkårleg konstant.

Merk: $\int f(x)dx$ og $\int_a^b f(x)\,dx$ er veldig ulike ting

$\int f(x)dx$: Funksjon av x – med ukjend ledd

$\int_a^b f(x)dx$: Eit tal.

Anti-derivasjons-reglar

– Ein for kvar derivasjonsregel

$(f+g)' = f' + g'$
$(cf)' = cf'$
linearitet

$\int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx$
$\int (c \cdot f)dx = c \cdot \int f\,dx$
linearitet

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
$uv' = (u \cdot v)' - u'v$
produktregel

$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$
delvis integrasjon

$f(x) = g(u(x)) \Rightarrow$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

Kjerneregel

$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$

Variabelbyte / Substitusjon

Elementære funk.:

$\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \neq -1$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$

$\int e^x\, dx = e^x + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala:

a) $\int (2\sqrt{x} + x^{\pi})\, dx$

b) $\int \left(\frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + 4\sin x\right) dx$

c) $\int x^2 e^{x^3+1}\, dx$

d) $\int x \cos x\, dx$

a) $\int (2\sqrt{x} + x^{\pi})\, dx = 2\int x^{1/2}\, dx + \int x^{\pi}\, dx =$

$$2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{1/2+1} + \frac{1}{\pi+1} x^{\pi+1} + C = 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{3/2} + \frac{1}{\pi+1} x^{\pi+1} + C$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{1}{\pi+1} x^{\pi+1} + C$$

b) $\int \left(\frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + 4 \sin x \right) dx = 7 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 4 \int \sin x \, dx =$

$7 \arcsin x - 4 \cos x + C$

c) $\int x^2 e^{x^3+1} dx$

Ny variabel: $u(x) = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2, \quad du = 3x^2 dx, \quad dx = \frac{1}{3x^2} du$

$\int x^2 e^{x^3+1} dx = \int x^2 e^u \frac{1}{3x^2} du = \frac{1}{3} \int e^u du =$

$\frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$

d) $\int x \cos x \, dx$

Delvis int.: $\int u v' dx = uv - \int u' v \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \Leftarrow v = \sin x$

$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx =$

$x \sin x + \cos x + C$

Sjekk:

$(x \sin x + \cos x + C)' = 1 \sin x + x \cos x + (-\sin x) =$

$x \cos x$ OK

Variabelbyte med lineær kjerne

Påstand:

$$\boxed{\text{Dersom } F'(x) = f(x), \text{ er} \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

Viser dette:

Veit: $\int f(x)\,dx = F(x) + C''$

$u = ax+b \Rightarrow \frac{du}{dx} = a, \quad dx = \frac{1}{a}\,du$

$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u)\cdot \frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int f(u)\,du =$

$\frac{1}{a}\left(F(u) + C'\right) = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \square$

$\left(C = \frac{1}{a}C'\right)$

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala:

a) $\int \sin(5x+7)\,dx$

b) $\int \frac{1}{3x-4}\,dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

a) $\int \sin(5x+7)\,dx = \frac{1}{5}\left(-\cos(5x+7)\right) + C =$

$\underline{-\frac{1}{5}\cos(5x+7) + C}$

b) $\int \frac{1}{3x-4}\,dx = \underline{\frac{1}{3}\ln|3x-4| + C}$

c) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx =$

$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\arctan\frac{x}{2} + C =$

$\underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$

Poeng: Om u er lineær, $u = ax+b$, bør det ikke være nødvendig å gjøre variabelbyttet eksplisitt.

Eksempel

Finn dette ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3+x^2-4x-12}{x^2-9}\,dx$$

Ser: Graden i polynomet i telleren er større enn graden i nevneren. Vi gjør en polynom divisjon:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+x^2-4x-12):(x^2-9) = x+1+\dfrac{5x-3}{x^2-9} \\
-(x^3-9x) \\
\hline
\quad x^2+5x-12 \\
\quad -(x^2-9) \\
\hline
\quad\quad 5x-3
\end{array}
$$

Integralet er

$$\int \left(x+1+\frac{5x-3}{x^2-9}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+x+\int \frac{5x-3}{x^2-9}\,dx$$

Delbrøksoppspalting (ikkje på pensumlista, men vi har sett det før):

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

Set $\dfrac{5x-3}{x^2-9} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3} = \dfrac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{(A+B)x+3A-3B}{x^2-9}$

Altså: $A+B=5$ og $3A-3B=-3$

$A=B-1$

$B-1+B=5, \quad B=3, \quad A=3-1=2$

Altså: $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-9}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}\right)dx =$

$2\ln|x-3|+3\ln|x+3|+C$

Alt i alt:

$$\int \frac{x^3+x^2-4x-12}{x^2-9}\,dx = \underline{\frac{1}{2}x^2+x+2\ln|x-3|+3\ln|x+3|+C}$$

$$= \frac{1}{2}x^2+x+\ln(x-3)^2+3\ln|x+3|+C =$$

$$\frac{1}{2}x^2+x+\ln\left((x-3)^2(x+3)^3\right)+C$$

Kva teknikkar kan vi bruke på desse integrala?

i) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

ii) $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$

iii) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

iv) $\int \ln x \, dx$

v) $\int x^3 e^x \, dx$

vi) $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

vii) $\int \cos x \, e^x \, dx$

---

i) $u = \sin x$ gir $dx = \frac{1}{\cos x} du$

$\int \sin^4 x \cos x = \int u^4 \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} du = \int u^4 du$

ii) $\sin^4 x \cos^5 x = \sin^4 x \cos^4 x \cdot \cos x = \sin^4 x (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x$

$= \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$

$u = \sin x$

$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \underbrace{u(1-u^2)^2}_{\text{polynom}} du$

iii) Formlar: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+\cos(2 \cdot 2x)}{2}\right) = \frac{1}{8}(2 - 1 - \cos(4x)) \ldots$

iv) Hint: $\ln x = \ln x \cdot 1$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \Leftarrow v = x$

$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \ldots$

v) $u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$

$v' = e^x \Leftarrow v = e^x$

$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx$

Så:

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$, v' som før:

$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x \, e^x \, dx$

Så

$u = x \Rightarrow u' = 1$

– Delvis int. 3 ganger.

vi)

$\int x \sqrt{x+1} \, dx$

Variabelbytte: $u = x+1$, $du = dx$, $x = u-1$

$\int x \sqrt{x+1} \, dx = \int (u-1)\sqrt{u} \, du = \int (u^{3/2} - u^{1/2}) \, du$

vii) Delvis:

$\int \cos x \; e^x \, dx = -\sin x \, e^x - \int (-\sin x) \, e^x \, dx$

$= -\sin x \, e^x + \int \sin x \, e^x \, dx$

$\int \sin x \, e^x \, dx = \cos x \, e^x - \int \cos x \; e^x \, dx$

Altså: $\int \cos x \; e^x \, dx = -\sin x \, e^x + \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x \, dx$

$\Leftrightarrow \quad 2 \int \cos x \, e^x \, dx = -\sin x \, e^x + \cos x \, e^x + C'$