

Føreløsing 7/14

① Om obligane

② Torsdag:

$y' + f(x)y = g(x)$ har løsning gitt

Ved $e^{F(x)} y = \int e^{F(x)} g(x) dx$ der

$$F'(x) = f(x)$$

- Formel. Keisamt?

Poeng fra oblig 2

$$u(t) = 325 \sin(\omega t)$$

Finne U_{RMS}

$$\text{Formel: } U_{RMS} = \frac{325}{\sqrt{2}}$$

Formel - keisamt? Ja!

Eigen tleg:

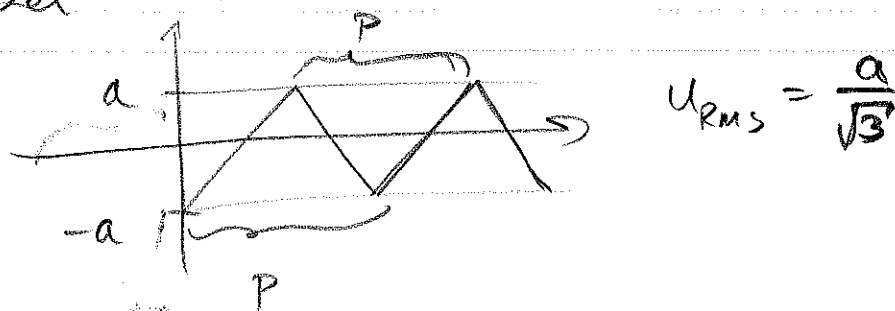
$$U_{RMS} = \sqrt{\overline{u^2}}, \quad \overline{u^2} = \frac{1}{P} \int_0^P (u(t))^2 dt$$

$$= \dots = \frac{1}{2} \cdot 325^2$$

Poeng: Det var jo at $U_{RMS} = \frac{325}{\sqrt{2}}$ vi skulle komme fram til.

Andre typer funksjoner: $U_{RMS} \neq \frac{a}{\sqrt{2}}$

Eksempel:



③ Andre ordens lineære differensial- likninger med konstante koeffisienter

- Vi brukar metoden introdusert
på torsdag - den metoden vi
ikke brukte da.

Eksempel

a) Finn den generelle løysinga av den
homogene differensiallikninga

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

- b) Finn den generelle løysinga av den inhomogene differensiallikninga

$$y'' - 5y' + 6y = 6x + 2$$

- c) Finn den løysinga som oppfylles initialkravet

$$y(0) = 10$$

$$y'(0) = 9$$



- a) "Tippa" at $y = e^{rx}$

$$\Rightarrow y' = r e^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}$$

Set inn:

$$r^2 e^{rx} - 5r e^{rx} + 6 e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (r^2 - 5r + 6) = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad - \text{ karakteristiske likning}$$

$$r = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$r = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{eller} \quad r = \frac{5+1}{2} = 3$$

To løysingar: $y_1 = e^{2x}$ og $y_2 = e^{3x}$

- Lineært uavhengige.

Teori fra lineær algebra:

Dø er ein generell lineær-

kombinasjon av y_1 og y_2

$$y = Ay_1 + By_2$$

Viser dette:

$$y' = Ay_1' + By_2', \quad y'' = Ay_1'' + By_2''$$

$$Ay_1'' + By_2'' - 5(Ay_1' + By_2') + 6(Ay_1 + By_2) =$$

$$A(y_1'' - 5y_1' + 6y_1) + B(y_2'' - 5y_2' + 6y_2) =$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \quad \text{OK}$$

Altså:

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

5) Skal ha $y'' - 5y' + 6y = 6x + 2$.

1.-gradsfunksjon på høyre side.

"Tippas" at y er en generell 1.-gradsfunk.

$$y = ax + b$$

Det gir at $y' = a$ og $y'' = 0$

Sett inn:

$$0 - 5a + 6(ax + b) = 6x + 2$$

$$6ax + 6b - 5a = 6x + 2$$

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 6b - 5a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{2+5a}{6} = \frac{2+5 \cdot 1}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$y = x + \frac{7}{6} \quad - \text{partikulær løsning}$$

Generell løsning: Summen af partikulær løsning
og den generelle løsning af den homogene
likning:

$$y = x + 7 + A e^{2x} + B e^{3x}$$

c) Skal lde: $y(0) = 10$
 $y'(0) = 9$

$$y(0) =$$

$$0 + \frac{7}{6} + A \cdot e^0 + B e^0 = 10, \quad A + B = \frac{53}{6}$$

$$y'(x) = 1 + 0 + 2A e^{2x} + 3B e^{3x}$$

$$y'(0) =$$

$$1 + 2A \cdot e^0 + 3B e^0 = 9, \quad 2A + 3B = 8$$

Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{53}{6} \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{53}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{37}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{37}{2}, \quad B = -\frac{29}{3}$$

Vi får:

$$y(x) = x + \frac{7}{6} + \frac{37}{2} e^{2x} - \frac{29}{3} e^{3x}$$

Vi oppsummerer metoden:

For å løse differensiallikninga

$$y'' + py' + qy = b(x)$$

1) Løs den homogene likninga

$$y'' + py' + qy = 0$$

ved å "tippe" $y = e^{rx}$

- Finn løsningene r_1 og r_2 og funksjonen

$$y_h = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$$

2) Finn en partikulær løsning y_p av

$y'' + py' + qy = b(x)$ ved å "tippe" at y_p er en funksjon av samme type som $b(x)$

3) Set opp den generelle løsinga av

$$y'' + py' + qy = b(x) \text{ ved summere } y_p \text{ og } y_h:$$

$$y = y_p + y_h$$

4) Implementer eventuelle initialkrav

for å bestemme A og B .

Møtelege "skjær i søen":

① Vi får berre $\bar{c}_i$ eller ingen (nele) løysingar for r .

② For den partikulære løysinga: Forme er alt inkludert i y_h .

Vi ser på a) - problema først:

Eksempel (problem ①)

Løys desse homogene diff. - likningane:

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

a) - Går ut frå at $y = e^{rx}$ slik at
 $y' = r e^{rx}$ og $y'' = r^2 e^{rx}$

Set inn:

$$r^2 e^{rx} - 6r e^{rx} + 9e^{rx} = e^{rx}(r^2 - 6r + 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad - \text{Ok } \hat{r} \text{ sette opp}$$

derfor direkte

$$r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

- Berre $\bar{c}_i$ rot!

Løysing: $y_1 = e^{3x}$

Også løysing: $y_2 = x e^{3x}$

Viser dette: $y_2' = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot 3e^{3x} = e^{3x} \cdot (3x+1)$

$$y_2'' = 3e^{3x} (3x+1) + e^{3x} (3+0) = e^{3x} (9x+6)$$

Set inn:

$$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = e^{3x} (9x+6) - 6e^{3x} (3x+1) + 9x e^{3x} =$$

$$e^{3x} (9x+6-18x-6+9x) = e^{3x} \cdot 0 = 0 \quad \text{OK}$$

Generell løysing:

$$y = A y_1 + B y_2 = A e^{3x} + B x e^{3x} = \underline{e^{3x} (A + Bx)}$$

b) Går ut fra at $y = e^{rx}$ og får karakteristiske likning

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} =$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1} = 2 \pm 1 \cdot \sqrt{1}$$

-Inge (reell) løysing

Får da disse løysingane

$$y_1 = e^{2x} \cdot \cos(1 \cdot x) \quad \text{og} \quad y_2 = e^{2x} \cdot \sin(1 \cdot x)$$

Viser dette for y_1 :

$$y_1' = 2e^{2x} \cos x + e^{2x} (-\sin x) = e^{2x} (2\cos x - \sin x)$$

$$y_1'' = 2e^{2x} (2\cos x - \sin x) + e^{2x} (-2\sin x - \cos x) =$$

$$e^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x)$$

Set inn:

$$e^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x) - 4 e^{2x} (2 \cos x - \sin x) + 5 e^{2x} \cos x =$$

$$e^{2x} (3 \cos x - 4 \sin x - 8 \cos x + 4 \sin x + 5 \cos x) =$$

$$e^{2x} \cdot 0 = 0$$

Ok

Generell løsning

$$y = A y_1 + B y_2 = A e^{2x} \cos x + B e^{2x} \sin x =$$

$$e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

Kvifor er det slike? Svaret kom på torsdag.

Eksempel problem II

Løys desse differensiallikningane

a) $y'' - 9y = 3e^{-2x}$

b) $y'' - 9y = 5e^{3x}$

c) $y'' + 2y' + y = \sin(2x)$

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

a) Homogen liden: $y'' - 9y = 0$

$y = e^{rx}$ gir karakteristisk liden.

$$r^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3$$

$$y_h = A e^{-3x} + B e^{3x}$$

Inhomogen liden: $y'' - 9y = 3e^{-2x}$

-Tippa løysing som er ein eksponentialfunk. med eksponent $-2x$.

$$y = a e^{-2x}$$

$$\text{Får } y' = -2a e^{-2x} \text{ og } y'' = 4a e^{-2x}$$

Set inn:

$$4a e^{-2x} - 9a e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$-5a e^{-2x} = 3e^{-2x}$$

$$-5a = 3, a = -\frac{3}{5}$$

Partikulær løysing: $y_p = -\frac{3}{5}e^{-2x}$

Generell løysing:

$$y = y_p + y_h = -\frac{3}{5}e^{-2x} + A e^{-3x} + B e^{3x}$$

b) Same homogene liting: $y_h = A e^{-3x} + B e^{3x}$

-Går ut frå at ei partikulær løysing kan finnast ved $y = a e^{3x}$, sidan vi har $5e^{3x}$ på høgre side.

Før $y' = 3ae^{3x}$ og $y'' = 9ae^{3x}$

Set inn:

$$9ae^{3x} - 9 \cdot ae^{3x} = 5e^{3x}$$

$$0 = 5e^{3x}$$

-Går ikke.

Dette kunne vi sett med en gang

$y = ae^{3x}$ er alt inkludert i

$$y_u = Ae^{-3x} + Be^{3x} \quad (\text{med } A=0 \text{ og } B=a)$$

Løsning (ripen): Gange med x .

-Går ut fra at $y = xae^{3x}$ er en løsning for passende a .

$$y' = a(1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3) = ae^{3x}(3x+1)$$

$$y'' = a(3e^{3x}(3x+1) + ae^{3x}(3 \cdot 1 + 0)) = ae^{3x}(9x+6)$$

Sett inn:

$$ae^{3x}(9x+6) - 9ae^{3x} \cdot x =$$

$$ae^{3x}(9x+6-9x) = ae^{3x} \cdot 6 = 5e^{3x}$$

$$6a = 5, \quad a = \frac{5}{6}$$

$$y_p = \frac{5}{6} x e^{3x}$$

Generell løsning:

$$y = y_p + y_u = \frac{5}{6} x e^{3x} + Ae^{-3x} + Be^{3x} = Ae^{-3x} + e^{3x}(\frac{5}{6}x + B)$$

$$c) \quad y'' + 2y' + y = \sin(2x)$$

Homogen likn.: $y'' + 2y' + y = 0$

$y = e^{rx}$ gir karakteristisk likn.: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Løsninger: $y_1 = e^{-x}$ og $y_2 = x e^{-x}$

Generell løsning av homogen likning:

$$y_h = A e^{-x} + B x e^{-x} = e^{-x} (A + Bx)$$

$$y'' + 2y' + y = \sin(2x)$$

- Antar at y er en trigonometrisk funksjon med 2 som "bølgetal".

To skinnemåter:

$$y = a \sin(2x + b) \quad \text{eller}$$

$$y = a \sin(2x) + b \cos(2x)$$

- Vel den siste.

$$y' = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)$$

$$y'' = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x)$$

Sett inn:

$$-4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + 2(2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)) +$$

$$a \sin(2x) + b \cos(2x) =$$

$$\sin(2x) \cdot (-4a - 4b + a) + \cos(2x) \cdot (-4b + 4a + b) =$$

$$(-3a - 4b) \sin(2x) + (4a - 3b) \cos(2x) = \sin(2x)$$

Skal gjelde for alle x :

$$(-3a-4b) \sin(2x) + (4a-3b) \cos(2x) = 1 \sin(2x) + 0 \cos(2x)$$

To likninger:

$$-3a-4b=1$$

$$4a-3b=0$$

Totalmatrise

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{II} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 25 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{25}} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{25} \end{bmatrix} \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{28}{25} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

$$a = -\frac{28}{25}, b = -\frac{4}{25}$$

$$y_p = -\frac{28}{25} \sin(2x) - \frac{4}{25} \cos(2x)$$

Generell løsning:

$$y = y_p + y_h = -\frac{28}{25} \sin(2x) - \frac{4}{25} \cos(2x) + e^{-x}(A + Bx)$$

d) - Same homogene likning som i c)

$$y_h = e^{-x}(A + Bx)$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

Høgre side: Førstegrads polynom ganger eksponential funksjon med $-x$ som eksponent.

$$\text{Antar } y = ae^{-x}?$$

Nei, denne

er det inkludert i y_h med $A=a$ og $B=0$
- Vil gi null på høyreside uansett.

Ganger med x ; $y = axe^{-x}$?

Nei, denne er også inkludert i y_h
med $A=0$, $B=a$.

- Ganger med x igjen: $y = ax^2e^{-x}$

$$\text{Gir } y' = a \cdot 2xe^{-x} + ax^2 e^{-x} \cdot (-1) = \\ ae^{-x} (2x - x^2)$$

$$y'' = a(-e^{-x})(2x - x^2) + ae^{-x}(2 - 2x) = \\ ae^{-x}(-2x + x^2 + 2 - 2x) = \\ ae^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Set inn:

$$ae^{-x}(x^2 - 4x + 2) + 2ae^{-x}(2x - x^2) + ax^2e^{-x} =$$

$$ae^{-x}(x^2 - 4x + 2 + 4x - 2x^2 + x^2) =$$

$$ae^{-x} \cdot 2 = e^{-x}, \quad 2a = 1, \quad a = \frac{1}{2}$$

Partikulær løsning: $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Generell løsning:

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + e^{-x}(A + Bx) =$$

$$\underline{e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + A + Bx \right)}$$