

Foredrag 3/4

① Oblig-styr:

Oblig 3, 2. gang: Leverer i hylle utenfor kontorene mitt innen mandag (7/4) kl. 14:00.

Oblig 4 (1. gang): Leverer i metallskap i 3. etg. (som vanlig) innen mandag 14/4 kl. 14:00.

- Skrevet 11/4 p.g.a undervisningsfri i veece 16.

Oblig 4: Feil i oppg. 26 (rettet no).

② Når dukker differensiallikninger opp?

- Prognoser: Økonomi, demografi, meteorologi...

- Mekanikk og fysikk

Eksempel:

Newtons 2. lov: $F = ma = m \sigma'(t) = m s''(t)$

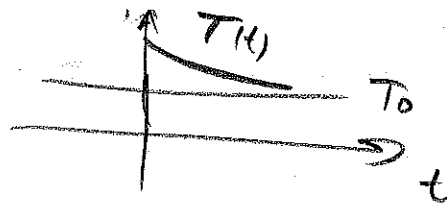
Fallskjermskopp: $m v'(t) = mg - k v$
 $\uparrow$
 Luftmotstand

Newtons avkjølingslov:

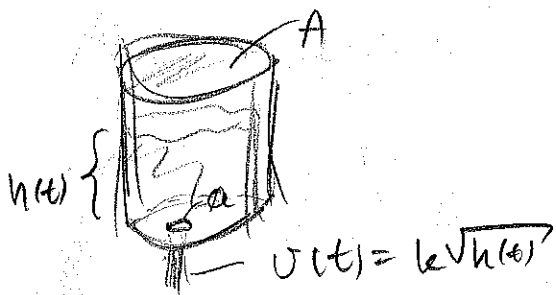
$$T'(t) = -k(T - T_0)$$

$\uparrow$
 Temp. i omgivelsen

ser: For $T > T_0$ avtar T - men
 stadig sakte



Torricelli's lov



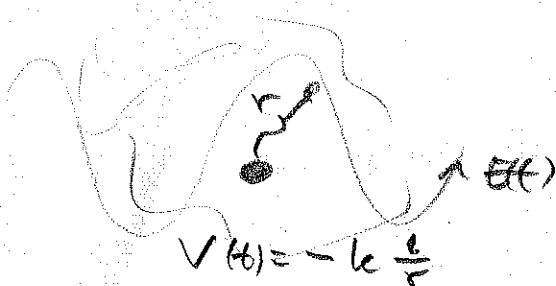
$$V'(h(t)) = a \cdot v(t)$$

$$A h'(t) = a \cdot k \cdot \sqrt{h(t)} \quad (\text{sylinder})$$

Schrödinger-ligning

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + e \times E(t) + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$



- Partiell diff.-ligning.

③ Klassifisering

Orden: Högaste deriverte i diff.-likninga

$$y'' + y' = \sin(x+y) \quad - 2. \text{ orden}$$

$$y^{(4)} + (y')^2 - y = 0 \quad - 4. \text{ orden}$$

Lineær: Kan skrivas som

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Eksempel, 3. orden

$$x \cdot y^{(3)} = \sin x \cdot y'' + 3x y' - y + \cos x^2 \Leftrightarrow$$

$$y^{(3)} - \frac{\sin x}{x} y'' + 3y' + \frac{1}{x} y = \frac{\cos x^2}{x}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $a_1 \qquad \qquad a_2 \equiv 3 \qquad a_3(x) \qquad b(x)$

I dag: Lineære differensiallikninger av første orden:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$b(x) \equiv 0$: Homogen

$b(x) \not\equiv 0$: Inhomogen

Eksempel

a) Løs den homogene differensiallikning
 $y' - 3y = 0$

b) Løs den inhomogene diff.-likning
 $y' - 3y = x$



Skal gjøre dette på flere måter

a) 1) $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ — separabel

$$dy = 3y dx$$

$$\frac{dy}{y} = 3 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3 dx$$

$$\ln|y| = 3x + C'$$

$$y = \pm e^{3x+C'} = \pm e^{C'} \cdot e^{3x} = \underline{C' e^{3x}} \quad (C' = \pm e^{C'})$$

2) Tipper på eksponentialløsning: $y = e^{rx}$

$$\text{Der gir at } y' = r e^{rx}$$

$$\text{Set inn: } r e^{rx} - 3 \cdot e^{rx} = 0$$

$$e^{rx} (r - 3) = 0$$

$$r = 3$$

$$\text{Altså: } y = e^{3x}$$

Generell løsning: $y = Ce^{rx}$.

- b) - Prøver 2 tippe på ei løsning igjen
 $b(x) = x$ - lineær funksjon.

"Tipper" at y er en generell lineær funksjon:

$$y(x) = ax + b \Rightarrow y' = a$$

Sett inn:

$$-a - 3(ax + b) = x$$

$$-3ax + a - 3b = x = 1x + 0$$

Skal stemme for alle x :

$$-3a = 1$$

$$a - 3b = 0$$

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Altså: } y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

Kan vise: Om vi legg til løsningen fra den homogene likningen, har vi framleis ei løsning: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x}$ gir:

$$y' = -\frac{1}{3} + 3Ce^{3x}$$

$$\text{Sett inn i } y' - 3y = x:$$

$$-\frac{1}{3} + 3Ce^{3x} - 3(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x}) =$$

$$-\frac{1}{3} + 3Ce^{3x} + x + \frac{2}{9} - 3Ce^{3x} = x$$

Ok

Ansvar: $y(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x}$

Annan metode

$$(e^{-3x}y)' = (e^{-3x})' \cdot y + e^{-3x} \cdot y' = e^{-3x}(y' - 3y)$$

Ganger begge sider med e^{-3x} :

$$e^{-3x}(y' - 3y) = e^{-3x} \cdot x$$

$$(e^{-3x}y)' = e^{-3x} \cdot x$$

$$e^{-3x}y = \int e^{-3x} \cdot x dx$$

Delvis int.: $u = x \Rightarrow u' = 1$

$$v' = e^{-3x} \Leftrightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\begin{aligned} \int e^{-3x} \cdot x dx &= -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot x - \int -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot 1 dx = \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot x + \frac{1}{9} \int e^{-3x} dx = \\ &= -\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C \end{aligned}$$

Ansvar:

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

$$\begin{aligned} y &= e^{3x} \left(-\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C \right) = \\ &= \underline{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + Ce^{3x}} \end{aligned}$$

Vi oppsummerar metodane

For å løyse $y' + a(x)y = b(x)$

1) Dersom a er konstant:

* Løser $y' + ay = 0$ (homogen)

- enten som separabel eller ved å
"tippe" på eksponentialfunksjon, $y = e^{rx}$

* Løser $y' + ay = b(x)$ (inhomogen) ved å
"tippe" at y er en funk. av same
type som $b(x)$.

* Generell løsning: Summen av den generelle
for $y' + ay = 0$ (Ce^{3x} i eksempelet) og
den spesielle vi fant for $y' + ay = b(x)$,
($y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{a}$) i eksempelet).

2) * Dersom vi finn ein funksjon $A(x)$ som
er ein antiderivert til $a(x)$:

$$(e^{A(x)} y)' = (e^{A(x)})' y + e^{A(x)} y' = \\ e^{A(x)} (y' + A'(x)y) = e^{A(x)} (y' + a(x)y),$$

kan likninga skrivast

$$(e^{A(x)} y)' = e^{A(x)} b(x)$$

* Antideriverer og får at $e^{A(x)} y = \int e^{A(x)} b(x) dx$

Lørebokke (4.5): $y' + f(x)y = g(x)$

$$\text{gir } (e^{F(x)} y)' = e^{F(x)} g(x)$$

der $F'(x) = f(x)$.

$e^{F(x)}$: "Integrerende faktor"

Eksempel

1) Finn den generelle løsning av disse differensialligningene

a) $y' = x^3 - xy$

b) $xy' + y = \frac{1}{x^2 + 4}$

c) $y + y' = \sin(2x)$

a) - Skriv ligningene på formen $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y' + xy = x^3, \quad f(x) = x \quad \text{og} \quad g(x) = x^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$e^{x^2/2} (y' + xy) = e^{x^2/2} x^3$$

$$(e^{x^2/2} y)' = e^{x^2/2} x^3$$

$$e^{x^2/2} y = \int x^3 e^{x^2/2} dx$$

Variabelbytte: $u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{x} du$

$$\int x^3 e^{x^2/2} dx = \int x^3 e^u \cdot \frac{1}{x} du = \int x^2 e^u du = \int 2u e^u du$$

Delvis int.: $\int f \cdot g' dx = fg - \int f' \cdot g dx$

$f = u \Rightarrow f' = 1$

$g' = e^u \Leftarrow g = e^u$

$\int 2u e^u du = 2 \int u e^u du = 2(u e^u - \int 1 \cdot e^u du) =$

$2u e^u - 2e^u + C = 2 \frac{x^2}{2} e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C =$

$x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C$

Alttså: $e^{x^2/2} y = x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C$

$y = e^{-x^2/2} (x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C)$

$y(x) = \underline{x^2 - 2 + C e^{-x^2/2}}$

③ er $C e^{-x^2/2}$ løsning af $y' + xy = 0$?

$(C e^{-x^2/2})' + x \cdot C e^{-x^2/2} = C e^{-x^2/2} \cdot (-\frac{x^2}{2})' + x C e^{-x^2/2} =$

$C e^{-x^2/2} (-2x \cdot \frac{1}{2} + x) = 0 \quad \text{Ok}$

b) $xy' + y = \frac{1}{x^2+4}$

Om en ser det: $(xy)' = 1 \cdot y + x \cdot y'$

$(xy)' = \frac{1}{x^2+4}, \quad xy = \int \frac{1}{x^2+4} dx$

Hvis ikke:

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x(x^2+4)}$

Integrerende faktor: $e^{F(x)}$ der $F'(x) = \frac{1}{x}$

Vel $F(x) = \ln x$ (droppar absolutt-verdi).

$$e^F = e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x} \cdot (y' + \frac{1}{x} y) = e^{\ln x} \frac{1}{x(x^2+4)}$$

$$x y' + y = \frac{1}{x^2+4}$$

$$(xy)' = \frac{1}{x^2+4} \quad (\text{da' var vi der igjen})$$

$$xy = \int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} dx =$$

$$\frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$y = \frac{1}{4x} \arctan \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

c) $y + y' = \sin(2x)$

Integrerende faktor: e^F med $F' = 1$

$$F = x$$

$$e^x (y + y') = e^x \sin(2x)$$

$$(e^x y)' = e^x \sin(2x)$$

$$e^x y = \int e^x \sin(2x) dx$$

Delvis int.: $u = \sin(2x) \Rightarrow u' = 2 \cos(2x)$

$$v' = e^x \Leftarrow v = e^x$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \cdot 2 \cos(2x) - \int e^x 2 \cos(2x) dx =$$

$$2e^x \cos(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx =$$

$$2e^x \cos(2x) - 2(e^x \cdot (-2) \sin(2x) - \int e^x \cdot (-2) \sin(2x) dx) -$$

$$2e^x \cos(2x) + 4e^x \sin(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

Altså:

$$\int e^x \sin(2x) dx = 2e^x \cos(2x) + 4e^x \sin(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$\int e^x \sin(2x) dx + 4 \int e^x \sin(2x) dx = 2e^x \cos(2x) + 4e^x \sin(2x)$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = 2e^x (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C'$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{2e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C'$$

Vi får:

$$e^x y = \frac{2e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C'$$

$$y = \frac{2}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + C' e^{-x}$$

Hint: Oppg. 26) i oblig. 4

